MAT0211-45 - Cálculo III
Respostas da Lista de Exercícios 1

1. (a) É aberto; dado p no conjunto, a bola de raio $r = 1 - \|p\|$ e centro em p está inteiramente contida no conjunto.
   (b) É aberto; dado (x, y) no conjunto, a bola de raio $r = \min\{1 - |x|, 1 - |y|\}$ está inteiramente contida no conjunto.
   (c) Não é aberto; $(0, 1)$ pertence ao conjunto, mas toda bola centrada em $(0, 1)$ de raio r tem $(-r/2,\ 1)$ dentro dela mas fora do conjunto.
   (d) Não é aberto; $(0, 0)$ pertence ao conjunto, mas toda bola centrada em $(0, 0)$ de raio r tem $(0,\ r/2)$ dentro dela mas fora do conjunto.
   (e) É aberto; dado p no conjunto, a bola de raio $r = \min\{\|p\| - 1, 4 - \|p\|\}$ e centro em p está inteiramente contida no conjunto.

2. (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2/(x^2 + y^2)^{3/2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -xy/(x^2 + y^2)^{3/2}$.
   (b) $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 2\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i$.
   (c) $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = a_k$.
   (d) $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 2x_k$.

3. (a) $a \cdot v/\|v\|$.
   (b) $2\,x \cdot v/\|v\|$.

4. (a)

$$\frac{\partial f}{\partial(-v)}(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p - hv) - f(p)}{h} = \lim_{h'\to 0} \frac{f(p + h'v) - f(p)}{-h'}$$
$$= -\frac{\partial f}{\partial v}(p) < 0.$$

   (b) $f(x) = v \cdot x$.
   (c) Completamente análogo.

5. (a) $\nabla f(x,y) = (2x + y^3\cos(xy),\, 2y\,\mathrm{sen}(xy) + xy^2\cos(xy))$.
   (b) $\nabla f(x,y) = (e^x\cos y,\, -e^x\,\mathrm{sen}\, y)$.
   (c) $\nabla f(x,y,z) = (2x,\, -2y,\, 2z)$.
6. $-\sqrt{6}/3$.
7. Pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$, com direções $(-1,0)$ e $(1,0)$, respectivamente.
8. $\nabla f(1,2) = (2,2)$, e a derivada direcional é $10/\sqrt{13}$.
9. (a)
$$\begin{aligned}\nabla r(x,y,z) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\\ &= \frac{\mathbf{r}(x,y,z)}{\|\mathbf{r}(x,y,z)\|}.\end{aligned}$$
   (b) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)/2$.
10. (a) $-2/3$.
   (b) 0.
11. $x + 2y - \sqrt{5}z = 0$.
12. $y_0z_0x + x_0z_0y + x_0y_0z = 3$.
13.
$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x - y - z = -1. \end{cases}$$