MAT211 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 8 – 28/05/2010

Prof. Claudio Gorodski

1. Calcular as integrais triplas:

   a. $\int\int\int_S (1+x+y+z)^{-3}\,dxdydz$, onde S é o sólido delimitado pelos três planos coordenados e pelo plano $x+y+z=1$.

   b. $\int\int\int_S xyz\,dxdydz$, onde $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

   c. $\int\int\int_S \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$, onde S é o sólido delimitado pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

   d. $\int\int\int_S \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, onde S é o o sólido formado pela metade superior do cone $z^2=x^2+y^2$ e pelo plano $z=1$.

2. Mudar a ordem de integração de modo que a primeira integração seja com respeito a y.

   a. $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[\int_{\sqrt{x^2-y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz\right] dy\right) dx.$

   b. $\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\right] dy\right) dx.$

3. Calcular o valor das integrais triplas mudando para coordenadas cilíndricas:

   a. $\int\int\int_S (x^2+y^2)\,dxdydz$, onde S é o sólido delimitado pela superfície $x^2+y^2=2z$ e pelo plano $z=2$.

   b. $\int\int\int_S dxdydz$, onde S é o sólido delimitado pelos planos coordenados, a superfície $z=x^2+y^2$ e o plano $x+y=1$.

4. Calcular o valor das integrais triplas mudando para coordenadas esféricas:

   a. $\int\int\int_S dxdydz$, onde S é a esfera sólida de raio a e centro na origem.

   b. $\int\int\int_S dxdydz$, onde S é o sólido delimitado por duas esferas concêntricas de raios a e b, onde $0<a<b$, cujo centro é a origem.

   c. $\int\int\int_S [(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{-1/2}\,dxdydz$, onde S é a esfera sólida de raio R e centro na origem, e (a,b,c) é um ponto no exterior da esfera.

5. Calcular o volume do sólidos delimitados pelas superfícies indicadas:

   a. A esfera $x^2+y^2+z^2=5$ por cima, o parabolóide $x^2+y^2=4z$ por baixo.

   b. O plano $z=0$, o cilindro $x^2+y^2=2x$ e o cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

6. Um cone circular reto sólido homogêneo tem altura h. Mostre que a distância de seu centróide à base é $h/4$.

7. Um cone circular reto sólido tem altura h e densidade proporcional à distância à base. Calcular o centro de massa.

8. Eliminar os parâmetros u e v para obter uma equação $F(x, y, z) = 0$:

a. $\vec{r}(u, v) = au \cos v \, \vec{i} + bu \sin v \, \vec{j} + u^2 \, \vec{k}$ (parabolóide elíptico).

b. $\vec{r}(u, v) = a \sin u \cos v \, \vec{i} + b \sin u \sin v \, \vec{j} + c \cos u \, \vec{k}$ (elipsóide).

c. $\vec{r}(u, v) = (a + b \cos u) \sin v \, \vec{i} + (a + b \cos u) \cos v \, \vec{j} + b \sin u \, \vec{k}$, onde $0 < b < a$ (toro). Qual o significado geométrico dos números a e b.

9. Calcular o módulo de $\partial\vec{r}/\partial u \times \partial\vec{r}/\partial v$:

a. $\vec{r}(u, v) = a \sin u \cosh v \, \vec{i} + b \cos u \cosh v \, \vec{j} + c \sinh v \, \vec{k}$

b. $\vec{r}(u, v) = (u + v) \, \vec{i} + (u - v) \, \vec{j} + 4v^2 \, \vec{k}$.

10. Calcular a área da superfície indicada:

a. A porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ay$, onde $a > 0$.

b. A porção da superfície $z^2 = 2xy$ cortada pelos planos $x = 2$ e $y = 1$, e que está acima do primeiro quadrante do plano xy.

c. A porção da superfície cônica $x^2 + y^2 = z^2$ que está acima do plano xy e no interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$.

11. Uma esfera está inscrita em um cilindro circular reto. A esfera está cortada por dois planos paralelos perpendiculares ao eixo do cilindro. Mostrar que as regiões da esfera e do cilindro que estão entre os dois planos têm a mesma área.