MAT211 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 2 – 12/03/2010

Prof. Claudio Gorodski

`É permitido assumir a diferenciablidade de todas as funções sob consideração.`

1. (Coordenadas esféricas em $\mathbf{R}^3$) Seja $f : \Omega \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definda por

$$f : \begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

onde Ω é o aberto

$$r > 0, \ -\pi < \theta < \pi, \ 0 < \varphi < \pi.$$

a. Calcular a matriz Jacobiana de f num ponto (r, θ, φ) de Ω.

b. Calcular o determinante da matriz Jacobiana do item (a).

c. Seja $u = g(x, y, z)$, onde $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. Exprimir as derivadas parciais de u em relação a r, θ, φ em termos das derivadas parciais de u em relação a x, y, z

d. Exprimir as derivadas parciais de u em relação a x, y, z em termos das derivadas parciais de u em relação a r, θ, φ.

e. Calcular $||\nabla g||^2$ em termos das derivadas parciais de u em relação a r, θ, φ.

2. Mostrar que a equação indicada pode ser resolvida para y em termos de x numa vizinhança do ponto indicado, e calcular a primeira derivada nesse ponto da função obtida:

a. $x\cos(xy) = 0$, $(x_0, y_0) = (1, \pi/2)$.

b. $xy + \log(xy) = 1$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

3. Verificar se a equação dada determina z como função das demais variáveis numa vizinhança do ponto dado e, em caso afirmativo, calcular as derivadas parciais de z nesse ponto:

a. $\sin x + \cos y + \tan z = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, \pi/2, \pi)$

b. $x^2 + 2y + 3z^2 - w = 0$, $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (1, 2, -1, 8)$

c. $1 + x + y = \cosh(x + z) + \sinh(y + z)$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

4. Escrever uma equação para o plano tangente da superfície

$$\sin^2 x + \cos(y + z) = \frac{3}{4}$$

no ponto $(\pi/6, \pi/3, 0)$.

5. Calcular o ângulo de intersecção das superfícies $2x^4 + 3y^3 - 4z^2 = -4$ e $1 + x^2 + y^2 = z^2$ no ponto $(0, 0, 1)$.

6. Se $t = g(x,y)$ e $s = F(t)$, calcular $\frac{\partial s}{\partial x}$ e $\frac{\partial s}{\partial y}$.

7. Sejam $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ e $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definidas por

$$f(x,y) = (e^{x+2y}, \sin(y+2x))$$

e

$$g(u,v,w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2)).$$

a. Calcular as matrizes Jacobianas $Jf(x,y)$ e $Jg(u,v,w)$.

b. Calcular a composta $h(u,v,w) = f(g(u,v,w))$.

c. Calcular a matriz Jacobiana $Jh(1,-1,1)$.

8. Um cilindro no $\mathbf{R}^3$, que está definido pela equação $y = f(x)$, é tangente à superfície $z^2 + 2xz + y = 0$ em todos os pontos comuns às duas superfícies. Calcular $f(x)$.

9. Verificar se as equações $x + y = uv$ e $xy = u - v$ determinam x e y em termos de u e v e calcular $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$.

10. Repetir o exercício anterior considerando x e v como funções de u e y.

11. A equação $x + z + (y+z)^2 = 6$ define z implicitamente como função de x e y, digamos, $z = f(x,y)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ em termos de x, y e z.

12. A intersecção das superfícies descritas pelas equações

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - z^2 &= 25, \\ x^2 + y^2 &= z^2, \end{cases}$$

é uma curva C passando pelo ponto $P = (\sqrt{7}, 3, 4)$. Calcular o vetor tangente unitário a C no ponto P de duas maneiras diferentes:

a. Escrevendo uma representação paramétrica explícita para C.

b. Usando o teorema da função implícita.

13. As três equações

$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2, \\ xy - \sin u \cos v + z = 0, \end{cases}$$

definem x, y e z como funções de u e v. Calcular $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial x}{\partial v}$ no ponto $x = y = 1$, $u = \pi/2$, $v = z = 0$.