MAT211 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 1 – 03/03/2010

PROF. CLAUDIO GORODSKI

1. Em cada um dos casos, indicar se o subconjunto do $\mathbf{R}^2$ dado é aberto ou não:

   a. $x^2 + y^2 < 1$

   b. $|x| < 1$ e $|y| < 1$

   c. $x \geq 0$ e $y > 0$

   d. $x \geq y$

   e. $(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) > 0$

2. Calcular as derivadas parciais das seguintes funções:

   a. $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

   b. $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, onde $a_{ij} = a_{ji}$.

   c. $f(x) = a \cdot x$, onde $a \in \mathbf{R}^n$ está fixado, e $x \in \mathbf{R}^n$.

   d. $f(x) = ||x||^2$ onde $x \in \mathbf{R}^n$,

3. Calcular a derivada direcional de $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ na direção $v \in \mathbf{R}^n$:

   a. $f(x) = a \cdot x$, onde $a \in \mathbf{R}^n$ está fixado.

   b. $f(x) = ||x||^2$

4.

   a. Mostre que não existe função $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, Ω aberto, tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(p) > 0$ para $p \in \mathbf{R}^n$ fixado e $v \in \mathbf{R}^n$ arbitrário.

   b. Exiba um exemplo de uma função $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(p) > 0$ para $v \in \mathbf{R}^n$ fixado e $p \in \mathbf{R}^n$ arbitrário.

   c. Generalizar os itens anteriores para funções $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

5. Calcular o campo gradiente onde ele existe:

   a. $f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$

   b. $f(x, y) = e^x \cos y$

   c. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2$

6. Calcular a derivada direcional de $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ no ponto $p = (1, 1, 0)$ na direção $v = (1, -1, 2)$.

7. Calcular os pontos (x, y) e as direções para os quais a derivada direcional de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ tem o maior valor possível, sendo (x, y) um ponto do círculo $x^2 + y^2 = 1$.

8. Sabendo que f tem, em $p = (1, 2)$, derivadas direcionais $+2$ na direção apontando para o ponto $(2, 2)$ e -2 na direção $(1, 1)$, calcular o gradiente de f em p e sua derivada direcional na direção apontando para o ponto $(4, 6)$.

9. Em $\mathbf{R}^3$, sejam $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ e $r(x, y, z) = ||\mathbf{r}(x, y, z)||$.

a. Mostre que $\nabla r(x, y, z)$ é um vetor unitário na direção de $\mathbf{r}(x, y, z)$.

b. Exiba uma função $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ tal que $\nabla f = \mathbf{r}$.

10. Calcular a derivada direcional de f nos pontos e direções especificados:

a. $f(x, y, z) = 3x - 5y + 2z$, $p = (2, 2, 1)$, v é o vetor normal unitário exterior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

b. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, $p = (3, 4, 5)$, v é um vetor unitário tangente à curva intersecção das superfícies $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$ e $x^2 + y^2 = z^2$.

11. Escrever uma equação para o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no ponto $p = (1, 2)$.

12. Escrever uma equação para o plano tangente a $xyz = 1$ no ponto (x_0, y_0, z_0).

13. Escrever um par de equações para a reta tangente à intersecção das superfícies $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ e $z = e^{x-y}$ no ponto $(1, 1, 1)$.