MAT139 – Álgebra Linear para Computação
Respostas da Lista de Exercícios 5

1. $||x|| = \sqrt{21}$, $||y|| = 3\sqrt{2}$ e $x^t y = 0$.

2. Sim: $\{(1,0),(1,1)\}$. Sim: $\{(1,0),(0,0)\}$.

3. Todos os múltiplos de $(1,1,-2)$.

5. $\{(2,2,-1)\}$ é uma base do núcleo de A; $(3,3,3) = (1,1,4) + (2,2,-1)$.

6. $x-y \perp x+y$ se e somente se $(x-y)^t(x+y) = 0$ se e somente se $(x^t - y^t)(x+y) = 0$ se e somente se $x^t x + x^t y - y^t x - y^t y = 0$ se e somente se $||x||^2 - ||y||^2 = 0$ se e somente se $||x|| = ||y||$.

7. (a) F (b) F (c) F (d) V

8. $\{(1,1,1,1)\}$.

9. $\{(0,-1,1,0),(-5,1,0,1)\}$.

10. Temos

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= (x+y)^t(x+y) \\ &= x^t x + x^t y + y^t x + y^t y \\ &= ||x||^2 + 2x^t y + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + ||x||||y|| + ||y||^2 \qquad \text{(por Cauchy-Schwarz)} \\ &= (||x|| + ||y||)^2. \end{aligned}$$

Provamos que $||x+y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2$. Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, e observando que $||x+y||$ e $||x|| + ||y||$ são ambos positivos, obtemos o resultado desejado.

11. $(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3})$; $(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9})$.

12. $-\frac{1}{3}$;

13. $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

14. (a) $P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$; $P_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$.
(b) $P_1 + P_2 = I$ e $P_1 P_2 = 0$.

15. $\bar{x} = 2$.

16. $\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

17. $b = \frac{61}{35} - \frac{36}{35}t$.

18. $b = 1 - t$.

19. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

20. O espaço-coluna é S e o posto é k.

21. (a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$; (b) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

22. $\mathrm{proj}_{a_1} b = 2a_1 = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$; $\mathrm{proj}_{a_2} b = 2a_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$; $\mathrm{proj}_{\langle a_1, a_2\rangle} b = 2a_1 + 2a_2 = (\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3})$.

23. Não, a não ser que seja a identidade, pois o núcleo da projeção é o complementar ortogonal da imagem.

24. Se $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ então aa^t tem elementos diagonais $a_1^2, \ldots, a_n^2$.