MAT139 – Álgebra Linear para Computação
Respostas da Lista de Exercícios 4

1. $\operatorname{im} A = \{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \,|\, y_3 = 0\}$, $\ker A = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \,|\, x_2 = x_3 = 0\}$, $\operatorname{im} A^t = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \,|\, x_1 = 0\}$, $\ker A^t = \{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \,|\, y_1 = y_2 = 0\}$.

2. Se $y \in \operatorname{im} B$ então $y = Bx$ para algum x, então $Ay = A(Bx) = (AB)x = 0x = 0$. Portanto $y \in \ker A$. Isso mostra que $\operatorname{im} B \subset \ker A$.

3. (a) $n > m = r$ (b) $m = n = r$ (c) $r < m$ (d) $m = n = r$ (e) $n = r$ (f) $m = r$

4. Suponha que A é uma matriz tal que $(1\ 1\ 1)^t \in \ker A$. Essa condição diz que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Então A tem 3 colunas ($n = 3$) e a soma dos elementos de cada linha é zero, $a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = 0$ para $i = 1, \ldots, m$. Agora $\operatorname{im} A^t$ é o espaço das linhas de A, e qualquer vetor no espaço das linhas de A é uma combinação linear das linhas de A e portanto a soma de suas três componentes também tem que ser zero. Como $1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$, não podemos ter $(1\ 1\ 1)^t \in \operatorname{im} A^t$. Logo não pode existir matriz nas condições do enunciado.

5. As colunas de A são então LI, e portanto $r = n$.

6. (1 2 4).

7. A tem uma inversa à direita $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$; M tem uma inversa à esquerda $\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$; se $a \neq 0$, então T tem uma inversa bi-lateral $\begin{pmatrix} 1/a & -b/a^2 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. (a) A matriz deve ser 3 por 2. Tentemos com as colunas dadas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nesse caso, as linhas geram todo o $\mathbf{R}^2$, portanto o espaço-das-linhas de A contém os vetores dados.
(b) O posto $r = 1$ e a nulidade é 1. O número de linha é $n = 3$, mas isso contradiz o teorema fundamental, pois $1 + 1 \neq 3$. Então A não existe.
(c) O número de linhas LI é 3 e o número de colunas LI é 4. Mas esses números deveriam ser iguais. Então A não existe.

10. A elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

11. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Se p, $q \in W$, então $\int_0^1 p(x)+q(x)\,dx = \int_0^1 p(x)\,dx+\int_0^1 q(x)\,dx = 0+0 = 0$, portanto $p+q \in S$. Além disso, se $\alpha \in \mathbf{R}$, então $\int_0^1 \alpha p(x)\,dx = \alpha \int_0^1 p(x)\,dx = \alpha \cdot 0 = 0$, e assim $\alpha p \in W$. Isso mostra que W é um subespaço.
Um polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in W$ pertence a W se e somente se $0 = \int_0^1 p(x)\,dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = 0$, ou seja, $3a + 4b + 6c + 12d = 0$. Portanto $\dim W = \dim \mathcal{P}_3 - 1 = 4 - 1 = 3$ e uma base é dada por $\{4x^3 - 1, 3x^2 - 1, 2x - 1\}$.

15. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$