MAT139 – Álgebra Linear para Computação
Respostas da Lista de Exercícios 2

1. Apenas (a), (d), (e), (f).

2. $C(A)$ consiste dos múltiplos de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $N(A)$ consiste dos múltiplos de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $C(B)$ é nulo e $N(B)$ consiste de todo $\mathbf{R}^3$. $C(C)$ consiste de todo $\mathbf{R}^2$ e $N(C)$ é gerado por $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Um subespaço que contém todas as matrizes simétricas e todas as matrizes triangulares inferiores deve conter também todas as somas de uma matriz simétrica e uma matriz triangular inferior. Mas toda matriz 3 por 3 A pode ser decomposta em tal soma, pois

$$A = B + (A - B)$$

onde $B = A_{sup} + (A_{sup})^t$ e A_{sup} é a matriz triangular superior cujos termos não-nulos (ou seja, aqueles na diagonal ou acima dela) coincidem com A. Note que B é simétrica e $A - B$ é triangular inferior. Explicitamente temos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 2a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} - a_{12} & -a_{22} & 0 \\ a_{31} - a_{13} & a_{32} - a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}.$$

Logo o menor subespaço que contém todas as matrizes simétricas e todas as matrizes triangulares inferiores é todo o espaço de matrizes 3 por 3.
O maior subsespaço que está contido em ambos esses subespaços é a intersecção desses subespaços que consiste das matrizes diagonais.

4. P_0 é o plano $x + 2y + z = 0$. P_0 é um subespaço, mas não P (pois não contém a origem.)

5. Apenas (a), (c).

6. A matriz nula não é ortogonal, pois não é invertível.

7. Temos que

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A solução geral de $Ax = 0$ é $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $\alpha \in \mathbf{R}$. $Ax = b$ admite soluções se e somente se b é múltiplo de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, ou ainda $b_1 = b_4 = 0$ e $b_3 - 4b_2 = 0$.

A solução geral de $Ax = b$ é $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $\alpha \in \mathbf{R}$.

8. (a) $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Conjunto vazio.

9. $c = 7$.

10. $u - w = 1$ e $v - 2w = 1$.

11. Para todo b_1, $b_2 \in \mathbf{R}$.

12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.