MAT139 – Álgebra Linear para Computação
Lista de Exercícios 5 – 22/09/2011

PROF. CLAUDIO GORODSKI

1. Calcular os comprimentos e o produto escalar de $x = (1, 4, 0, 2)$ e $y = (2, -2, 1, 3)$.

2. Existem vetores em $\mathbf{R}^2$ que são LI mas não mutualmente ortogonais? Existem vetores em $\mathbf{R}^2$ que são mutualmente ortogonais mas não LI? Justifique.

3. Calcular todos os vetores de $\mathbf{R}^3$ que são simultaneamente ortogonais aos vetores $(1, 1, 1)$ e $(1, -1, 0)$.

4. Duas retas no plano são perpendiculares se e somente se o produto de seus coeficientes angulares é -1. Convença-se da veracidade dessa afirmação usando o produto escalar.

5. Calcule uma base para o núcleo de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e verifique diretamente que ele é ortogonal ao espaço-de-linhas de A. Dado $x = (3, 3, 3)$, decomponha x em suas componentes x_r ao longo do espaço-de-linhas e x_n ao longo do núcleo.

6. Mostre que $x - y \perp x + y$ se e somente se $||x|| = ||y||$.

7. Decida sobre a veracidade das asserções:

a. Se V é ortogonal a W, então $W^\perp$ é ortogonal a $V^\perp$.

b. Se U é ortogonal a V e V é ortogonal a W, então U é ortogonal a W.

c. Se V está contido em W, então $V^\perp$ está contido em $W^\perp$.

d. Se V está contido em W, então $W^\perp$ está contido em $V^\perp$.

8. Seja S o subespaço de $\mathbf{R}^4$ definido pela equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Escreva uma base para o subespaço $S^\perp$.

9. Calcular uma base para o complementar ortogonal do subespaço de $\mathbf{R}^4$ gerado pelos vetores $(1, 2, 2, 3)^t$, $(1, 3, 3, 2)^t$.

10. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar a *desigualdade triangular* $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ para vetores x, y em um espaço vetorial V.

11. Qual é o múltiplo de $a = (1, 1, 1)$ mais próximo de $b = (2, 4, 4)$. Qual é o múltiplo de b mais próximo de a?

12. A molécula de metano CH_4 está arranjada de modo que o átomo de carbono está no centro de um tetraedro regular com um átomo de hidrogênio em cada vértice. Se os vértices estão localizados em $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$, (note que tal tetraedro é regular de aresta $\sqrt{2}$) qual é o cosseno do ângulo entre raios unindo o centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a dois dos vértices? Use uma calculadora eletrônica para obter um valor aproximado para esse ângulo.

13. Calcular a matriz que projeta ortogonalmente o $\mathbf{R}^2$ sobre a reta $x + 2y = 0$.

14.

a. Calcular a matriz P_1 que projeta o $\mathbf{R}^2$ sobre a reta por $a = (1,3)$ e também a matriz P_2 que projeta sobre a reta perpendicular a a.

b. Calcular $P_1 + P_2$ e $P_1 P_2$ e interpretar o resultado.

15. Calcular a solução aproximada de $3x = 10$, $4x = 5$ pelo método dos mínimos quadrados.

16. Resolver $Ax = b$ pelo método dos mínimos quadrados e calcular $p = A\bar{x}$ se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

17. Escrever a equação da melhor reta $b = x_1 + x_2 t$ (mínimos quadrados) para as medidas

t	b
-2	4
-1	3
0	1
2	0

.

18. Repetir o exercício anterior para os dados

t	b
-2	4
-1	2
0	-1
1	0
2	0

.

19. Calcular a matriz da projeção do $\mathbf{R}^3$ sobre o plano gerado por $a_1 = (1,0,1)$ e $a_2 = (1,1,-1)$.

20. Se P é a projeção do $\mathbf{R}^n$ sobre um subespaço S de dimensão k, quais são o espaço-coluna e o posto de P?

21. Seja V o subespaço de $\mathbf{R}^4$ gerado por $(1,1,0,1)$ e $(0,0,1,0)$. Calcular:

a. Uma base para o complemento ortogonal $V^\perp$.

b. A matriz da projeção P sobre V.

c. O vetor de V mais próximo de $b = (0,1,0,-1)$.

22. Projetar $b = (0,3,0)$ sobre cada um dos vetores ortonormais $a_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ e $a_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ e então determinar a sua projeção p sobre o plano gerado por a_1 e a_2.

23. Uma matriz de projeção é invertível? Justifique.

24. Mostre que o traço de $P = \frac{aa^t}{a^t a}$ é 1 para qualquer vetor $a \in \mathbf{R}^m$ não-nulo.