MAT122 e MAT2116 – Álgebra Linear
Respostas da Lista de Exercícios 5

1. A elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

2. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Se p, $q \in S$, então $\int_0^1 p(x) + q(x)\, dx = \int_0^1 p(x)\, dx + \int_0^1 q(x)\, dx = 0 + 0 = 0$, portanto $p + q \in S$. Além disso, se $\alpha \in \mathbf{R}$, então $\int_0^1 \alpha p(x)\, dx = \alpha \int_0^1 p(x)\, dx = \alpha \cdot 0 = 0$, e assim $\alpha p \in S$. Isso mostra que S é um subespaço.
Um polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in S$ pertence a S se e somente se $0 = \int_0^1 p(x)\, dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = 0$, ou seja, $3a + 4b + 6c + 12d = 0$. Portanto $\dim S = \dim P_3 - 1 = 4 - 1 = 3$ e uma base é dada por $\{4x^3 - 1, 3x^2 - 1, 2x - 1\}$.

6. $||x|| = \sqrt{21}$, $||y|| = 3\sqrt{2}$ e $x^t y = 0$.

7. Sim: $\{(1, 0), (1, 1)\}$.

8. Todos os múltiplos de $(1, 1, -2)$.

9. $\{(2, 2, -1)\}$ é uma base do núcleo de A; $(3, 3, 3) = (1, 1, 4) + (2, 2, -1)$.

10. $x - y \perp x + y$ se e somente se $(x-y)^t(x+y) = 0$ se e somente se $(x^t - y^t)(x+y) = 0$ se e somente se $x^t x + x^t y - y^t x - y^t y = 0$ se e somente se $||x||^2 - ||y||^2 = 0$ se e somente se $||x|| = ||y||$.

11. (a) Falso. (b) Falso.

12. $\{(1, 1, 1, 1)\}$.