MAT122 e MAT2116 – Álgebra Linear
Lista de Exercícios 4 – 03/04/2008

Prof. Claudio Gorodski

1. Descreva $\operatorname{im} A$, $\ker A$, $\operatorname{im} A^t$ e $\ker A^t$ no caso em que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Se o produto de duas matrizes é a matriz nula, $AB = 0$, mostre que $\operatorname{im} B \subset \ker A$.

3. Suponha que A é uma matriz m por n de posto r. Sob que condições sobre esses números temos que:

a. A tem uma inversa bi-lateral: existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$?

b. $Ax = b$ tem infinitas soluções em x para qualquer b dado?

4. Existe uma matriz A tal que $(1\ 1\ 1)^t$ pertence a $\operatorname{im} A^t \cap \ker A$?

5. Suponha que a única solução de $Ax = 0$ (m equações em n incógnitas) é a trivial, $x = 0$. Qual é então o posto de A? Por quê?

6. Determinar uma matriz 1 por 3 cujo núcleo consista dos vetores de $\mathbf{R}^3$ satisfazendo $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$.

7. Calcular uma inversa à esquerda ou uma inversa à direita, se elas existirem, para as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

8. Se V é o subespaço de $\mathbf{R}^3$ gerado pelos vetores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

exibir matrizes A e B tais que V é o espaço das linhas de A e é o núcleo de B.

9. Exiba uma matriz com as propriedades listadas ou explique por que tal matriz não pode existir:

a. Espaço das colunas contém $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e espaço das linhas contém $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. Espaço das colunas tem como base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e núcleo tem como base $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c. Espaço das colunas é $\mathbf{R}^4$ e espaço das linhas é $\mathbf{R}^3$.