MAT121 – Cálculo Diferencial e Integral II
Lista de Exercícios 7 – 26/10/12

Prof. Claudio Gorodski

1. Estudar os pontos críticos das funções indicadas:

a. $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

b. $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$

c. $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$

d. $f(x,y) = (x-y+1)^2$

e. $f(x,y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$

f. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

g. $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$

h. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + ax + by$

i. $f(x,y) = (y-x^2)^2 + x^5$

j. $f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$

k. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

l. $f(x,y) = y\cos x$

m. $f(x,y) = \sin x \cosh y$

n. $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

o. $f(x,y) = (5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$

p. $f(x,y) = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$

2. Estudar os pontos extremais das funções indicadas nas regiões indicadas:

a. $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ onde $0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq \pi/2$.

b. $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$ no triângulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,5)$.

c. $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ onde $x^2 + y^2 \leq 1$.

3. Sejam $a_1, \ldots, a_m$ m pontos mutuamente distintos em $\mathbf{R}^n$. Defina

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} ||x - a_i||^2$$

para $x \in \mathbf{R}^n$. Prove que f tem um ponto de mínimo em $a = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i$ (o *centróide*).

4. Seja $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$.

a. Esboce um desenho com o conjunto de pontos onde $f(x,y) \geq 0$.

b. Determine os pontos críticos de f.

c. Classifique os pontos críticos de f.

d. Tem f pontos de máximo ou mínimo absoluto no plano?

5. Considere $f(x,y) = xy^2 e^{-(x^2+y^2)^4}$. Mostre que há infinitos pontos críticos. O que você pode dizer sobre eles?

6. Considere $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$. Mostre que há cinco pontos críticos e determine os pontos extremais.

7. Determinar os valores de a para os quais a função $f(x,y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$:

a. tem exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;

b. tem exatamente dois pontos de sela e um mínimo local;

c. tem pelo menos um ponto de máximo local;

d. tem mais de três pontos críticos.

8. É impossível que uma função contínua $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ possua dois pontos de máximo local e nenhum ponto de mínimo local. (Por quê?) Isso não ocorre com uma função $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. De fato, verifique que $f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos pontos de máximo local. Esboce um desenho de uma tal superfície e tente explicar como isto ocorre.

9. Mostre que a função $f(x,y) = x^2 + 5y^2(1+x)^3$ possui um único ponto crítico, que este é um ponto de mínimo local, e que f não admite valor mínimo global.