MAT121 – Cálculo Diferencial e Integral II
Lista de Exercícios 6 – 5/10/12

Prof. Claudio Gorodski

1. Usar a fórmula de Taylor para escrever:

   a. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$ quando $x \to 0$.

   b. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$ quando $x \to 0$.

   c. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ quando $x \to 0$.

   d. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$ quando $x \to 0$.

   e. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ quando $x \to 0$.

   f. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n})$ quando $x \to 0$.

   g. $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)$ quando $x \to 0$.

   h. $\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + o(x^{4n})$ quando $x \to 0$.

   i. $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o(x^7)$ quando $x \to 0$.

   j. $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$ quando $x \to 0$.

   k. $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)$ quando $x \to 0$.

   l. $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$ quando $x \to 0$.

   m. $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$ quando $x \to 0$.

   n. $(1+x)^{1/x} = e \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + o(x^2)\right)$ quando $x \to 0$.

   o. $f(x) = x^3 + x^9 + o(x^9)$ quando $x \to 0$, onde f satisfaz $x^3 + f(x)^3 = f(x)$, $f(0) = 0$.

2. Considere $f(x) = \sqrt{x}$.

   a. Calcular o polinômio de Taylor de grau 4 de f no ponto $x_0 = 1$.

   b. Escrever o resto na forma de Lagrange.

   c. Usar o resultado acima para obter a estimativa $1,3984375 < \sqrt{2} < 1,42578125$.

3. Calcular $\sin(0,01)$ com três decimais.

4. Mostrar que

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx = 0,9461 \pm 2 \cdot 10^{-4}.$$

5. Seja $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ uma função com duas derivadas contínuas que satisfaz $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Tome $x_0 \in (a,b)$ arbitrário e mostre que o gráfico de f fica sempre acima da reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$.

6. Usar a fórmula de Taylor para calcular os seguintes limites:

a. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x}$

b. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$

c. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{e^{2x} - 1}$

d. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x \tan x}$

e. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$

f. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$

g. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$