MAT121 – Cálculo Diferencial e Integral II
Lista de Exercícios 4 – 24/8/12

Prof. Claudio Gorodski

1. Dê um exemplo de uma função $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ cuja curva de nível $f = 0$ seja desconexa (consista de dois "pedaços" disjuntos).

2. Mostre que as funções $f_1(t, x) = \sin(x+t)$ e $f_2(t, x) = \sin(x-t)$ satisfazem $f_{tt} = f_{xx}$. (Esta equação diferencial parcial é a chamada *equação da onda na reta*.) Qual onda está se movendo para a direita e qual para a esquerda? Voce consegue encontrar outras soluções para esta equação?

3.

a. Mostre que não existe função $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(p) > 0$ para $p \in \mathbf{R}^n$ fixado e $v \in \mathbf{R}^n$ arbitrário.

b. Exiba um exemplo de uma função $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(p) > 0$ para $v \in \mathbf{R}^n$ fixado e $p \in \mathbf{R}^n$ arbitrário.

4. Calcular o campo gradiente onde ele existe:

a. $f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$

b. $f(x, y) = e^x \cos y$

c. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2$

5. Calcular a derivada direcional de $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ no ponto $p = (1, 1, 0)$ na direção $v = (1, -1, 2)$.

6. Calcular os pontos (x, y) e as direções para os quais a derivada direcional de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ tem o maior valor possível, sendo (x, y) um ponto do círculo $x^2 + y^2 = 1$.

7. Sabendo que f tem, em $p = (1, 2)$, derivadas direcionais $+2$ na direção **do vetor unitário que aponta para o ponto** $(2, 2)$ e -2 na direção do vetor unitário que aponta para o ponto $(1, 1)$, calcular o gradiente de f em p e sua derivada direcional em p na direção do vetor unitário que aponta para o ponto $(4, 6)$.

8. Em $\mathbf{R}^3$, sejam $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ e $r(x, y, z) = ||\mathbf{r}(x, y, z)||$.

a. Mostre que $\nabla r(x, y, z)$ é um vetor unitário na direção de $\mathbf{r}(x, y, z)$.

b. Exiba uma função $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ tal que $\nabla f = \mathbf{r}$.

9. Calcular a derivada direcional de f nos pontos e direções especificados:

a. $f(x, y, z) = 3x - 5y + 2z$, $p = (2, 2, 1)$, v é o vetor normal unitário exterior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

b. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, $p = (3, 4, 5)$, v é um vetor unitário tangente à curva intersecção das superfícies $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$ e $x^2 + y^2 = z^2$.

10. Escrever uma equação para o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ no ponto $p = (1,2)$.

11. Sendo $f(x,y) = xe^{xy}$, usar a diferencial para calcular ua aproximação para $f(11/10, -1/10)$. Comparar o resultado obtido com o valor obtido através de uma calculadora eletrônica.

12. Prove que a função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ não diferenciável em $(0,0)$. Como é o gráfico dessa função?

13. O objetivo desta questão é provar o teorema de Schwarz a respeito da mudança da ordem de derivação: *Seja* $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *uma função definida num aberto* Ω *que admite derivadas parciais mistas* f_{xy} *e* f_{yx} *contínuas nesse conjunto. Então* $f_{xy} = f_{yx}$.

a. Considere

$$A = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)$$

e escreva

$$A = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \psi(y+k) - \psi(y)$$

onde $\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x,y)$ e $\psi(y) = f(x+h, y) - f(x,y)$.

b. Use o teorema do valor médio para escrever $A = h\varphi'(x + \theta_1 h)$ para algum $\theta_1 \in [0,1]$.

c. Note que $\varphi'(x) = f_x(x, y+k) - f_x(x,y)$ e use novamente o TVM para escrever

$$A = hkf_{xy}(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k)$$

onde $\theta_2 \in [0,1]$.

d. Repita os argumentos acima para obter

$$A = hkf_{yx}(x + \theta_3 h, y + \theta_4 k)$$

onde θ_3, $\theta_4 \in [0,1]$.

e. Usando a continuidade de f_{xy}, f_{yx}, conclua que

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(y,x).$$