Fórmulas de Taylor - Notas Complementares ao Curso de Cálculo I

Gláucio Terra

Sumário

§1. INTRODUÇÃO

Dada uma função real a valores reais f, suposta derivável até ordem n numa vizinhança de um ponto x_0 pertencente ao seu domínio, o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 é definido como sendo a (única) função polinomial de grau menor ou igual a n que tem "contato até ordem n" com f em x_0, i.e. que coincide com f em x_0 e cujas derivadas de ordens menores ou iguais a n coincidem com as de f em x_0. Nestas notas, mostrar-se-á que um tal polinômio existe e é único, e que, num sentido a ser precisado, é o polinômio de grau menor ou igual a n que melhor aproxima f numa vizinhança de x_0. Os principais resultados a serem apresentados são os teoremas relativos às fórmulas de Taylor com resto de Lagrange e com resto infinitesimal; como exemplo de aplicação, mostrar-se-á como a fórmula de Taylor com resto de Lagrange pode ser usada em cálculos numéricos aproximados.

§2. NOTAÇÕES

Dados $n \in \mathbb{N}$ e f uma função real a valores reais, derivável até ordem n numa vizinhança de um ponto $x_0 \in \operatorname{dom} f$, denotar-se-á por $f^{(k)}(x_0)$ a derivada de ordem k de f

em x_0 (para $1 \leqslant k \leqslant n$). Por extensão, $f^{(0)}$ denotará a própria função f.

§3. NOTAS PRELIMINARES SOBRE FUNÇÕES POLINOMIAIS $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

PROPOSIÇÃO 3.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial de grau menor ou igual a n. Então P tem derivadas de todas as ordens e $P^{(k)} \equiv 0$ para todo $k \geqslant n+1$.*

Demonstração. Faça como exercício, usando o princípio da indução finita. □

PROPOSIÇÃO 3.2. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial de grau menor ou igual a n, e $x_0 \in \mathbb{R}$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se:*

$$P(x) = P(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k. \tag{1}$$

Demonstração. Será feita por indução sobre n.

(i) Se $n = 0$, P é uma função constante, logo $\big(\forall\, x \in \mathbb{R}\big)\; P(x) = P(x_0)$ e a igualdade (1) está verificada.

(ii) Seja $n_0 > 0$, e suponha que (1) seja verdadeira para toda função polinomial com grau menor ou igual a $n_0 - 1$. Seja P uma função polinomial com grau menor ou igual a n_0; queremos verificar que (1) vale para P.

Como P' é uma função polinomial de grau menor ou igual a $n_0 - 1$, pela hipótese de indução a igualdade (1) vale para P', i.e. para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P'(x) &= P'(x_0) + \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{(P')^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k \\ &= P'(x_0) + \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{P^{(k+1)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k. \end{aligned} \tag{2}$$

Tome $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{aligned} F(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{P^{(k+1)}(x_0)}{k!}\,\frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} &= \\ = \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{P^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}\,(x - x_0)^{k+1} &= \sum_{k=1}^{n_0} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k. \end{aligned} \tag{3}$$

Então $F' = P'$; portanto, pelo teorema do valor médio, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $P = F + c$. Como $F(x_0) = 0$, segue-se $c = P(x_0)$, donde $\big(\forall\, x \in \mathbb{R}\big)\; P(x) = P(x_0) + F(x)$, o que é equivalente a (1).

$\square$

Corolário 3.3. *Dados $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, existe uma única função polinomial $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a n tal que $P^{(k)}(x_0) = a_k$, para $0 \leqslant k \leqslant n$.*

Demonstração. Tome $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\big(\forall\, x \in \mathbb{R}\big)\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\,(x - x_0)^k$. $\square$

§4. DEFINIÇÃO DO POLINÔMIO DE TAYLOR

Com base no corolário anterior, faz sentido a seguinte definição:

Definição 4.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tais que f é derivável até ordem $(n-1)$ numa vizinhança de x_0 e $f^{(n-1)}$ é derivável em x_0. Definimos o* polinômio de Taylor de ordem n *de f em x_0 como sendo a (única) função polinomial de grau menor ou igual a n tal que $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, para $0 \leqslant k \leqslant n$. Ou seja, $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por, para todo $x \in \mathbb{R}$:*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k. \tag{4}$$

Conforme será demonstrado em 6, o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 é, num certo sentido, o polinômio de grau menor ou igual a n que melhor aproxima f numa vizinhança de x_0. Por exemplo, para $n = 1$, o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em x_0 é a função afim cujo gráfico é a reta tangente ao gráfico de f em x_0, portanto esta reta é a que melhor aproxima (no referido sentido) o gráfico de f numa vizinhança de x_0. À medida que se tomam valores de n maiores, é intuitivo esperar que a referida aproximação seja cada vez melhor.

Exemplo 4.2. (1) Seja $f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esta função tem derivadas de todas as ordens e $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x_0 \in \mathbb{R}\big)\ \exp^{(n)}(x_0) = \exp(x_0)$. Portanto, dados $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, o polinômio de Taylor de ordem n de exp em x_0 é dado por:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k.$$

Em particular, para $x_0 = 0$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,x^k$$

é o polinômio de Taylor de ordem n de exp em $x_0 = 0$. Os gráficos dos polinômios de Taylor de ordens 1,2,3 de exp em $x_0 = 0$ encontram-se esboçados na figura 1.

(2) Seja $f = \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esta função tem derivadas de todas as ordens e $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x_0 \in \mathbb{R}\big)\ \sin^{(4n)}(x_0) = \sin(x_0), \sin^{(4n+1)}(x_0) = \cos(x_0), \sin^{(4n+2)}(x_0) = -\sin(x_0), \sin^{(4n+3)}(x_0) = -\cos(x_0)$ (verifique, por indução sobre n). Em particular,

para $x_0 = 0$, tem-se $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)$ $\sin^{(2n)}(0) = 0, \sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Portanto, dado $n \in \mathbb{N}$, o polinômio de Taylor de ordem $(2n+2)$ de sin em $x_0 = 0$ é dado por:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}.$$

Os gráficos dos polinômios de Taylor de ordens 1,3,5 de sin em $x_0 = 0$ encontram-se esboçados na figura 2.

(3) Seja $f = \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esta função tem derivadas de todas as ordens e $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x_0 \in \mathbb{R}\big)$ $\cos^{(4n)}(x_0) = \cos(x_0), \cos^{(4n+1)}(x_0) = -\sin(x_0), \cos^{(4n+2)}(x_0) = -\cos(x_0), \cos^{(4n+3)}(x_0) = \sin(x_0)$ (verifique, por indução sobre n). Em particular, para $x_0 = 0$, tem-se $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)$ $\cos^{(2n+1)}(0) = 0, \cos^{(2n)}(0) = (-1)^n$. Portanto, dado $n \in \mathbb{N}$, o polinômio de Taylor de ordem $(2n+1)$ de cos em $x_0 = 0$ é dado por:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}.$$

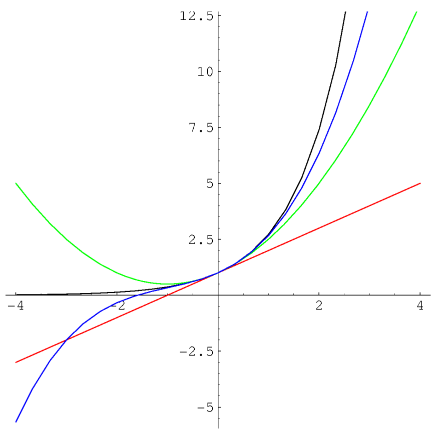

Figura 1: Gráfico de $f(x) = e^x$ e seus polinômios de Taylor de ordens 1(vermelho), 2(verde), 3(azul) em $x_0 = 0$.

§5. FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO DE LAGRANGE

Dada uma função f definida num intervalo I, derivável até ordem $(n+1)$, o teorema a seguir fornece uma fórmula para o resto da aproximação de f pelo seu polinômio de Taylor de ordem n, em termos da derivada $(n+1)$-ésima de f. Assim, se for possível estimar superiormente o módulo de tal derivada em I, o teorema pode ser aplicado para se obter uma estimativa superior do módulo do referido resto, o que é freqüentemente útil em cálculos aproximados.

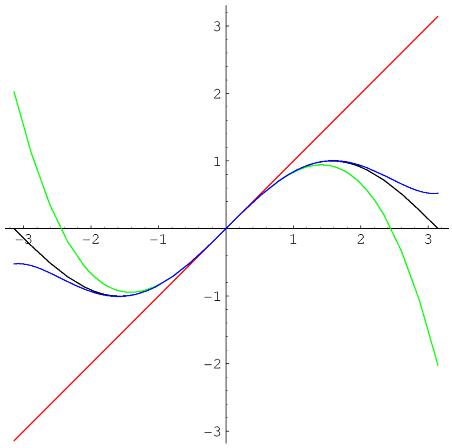

Figura 2: Gráfico de $f(x) = \sin x$ e seus polinômios de Taylor de ordens 1(vermelho), 3(verde), 5(azul) em $x_0 = 0$.

Teorema 5.1 (Fórmula de Taylor de ordem n, com resto de Lagrange). *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivável até ordem $n+1$*[1] *e $x_0, x \in I$. Então existe c entre x_0 e x (i.e. $x_0 < c < x$ ou $x < c < x_0$) tal que:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \tag{5}$$

Demonstração. Suponha $x_0 < x$ (se $x < x_0$, o argumento é análogo). Tome $F : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ definida por $\big(\forall\, y \in [x_0, x]\big)\ F(y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x-y)^k - A(x-y)^{n+1}$, onde $A \in \mathbb{R}$ é escolhido de forma que $F(x_0) = 0$. Tem-se: F é contínua em $[x_0, x]$ (pois todas as derivadas de ordem menor ou igual a n de f são contínuas em I, por hipótese), derivável em $]x_0, x[$ (pois todas as derivadas de ordem menor ou igual a n de f são deriváveis no interior de I, por hipótese), e $F(x) = F(x_0) = 0$. Então, pelo teorema de Rolle, existe $c \in]x_0, x[$ tal que $F'(c) = 0$. Mas, $\big(\forall\, y \in]x_0, x[\big)\ F'(y) = -f'(y) - \sum_{k=1}^{n} \big(\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} (x-y)^k - \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!} (x-y)^{k-1} \big) + (n+1)A(x-y)^n = -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} (x-y)^n + (n+1)A(x-y)^n$; como $c \neq x$ (pois $c \in]x_0, x[$), da última igualdade segue-se que $F'(c) = 0$ é equivalente a $A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$, portanto (5) segue-se de $F(x_0) = 0$.

□

Exemplo 5.2. (i) Aplicando o teorema anterior ao exemplo 4.2.1, com $x_0 = 0$, segue-se que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}, 0 < |c| < |x|$ tal que:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{\exp(c)}{(n+1)!} x^{n+1}. \tag{6}$$

[1] na verdade, basta supor f derivável até ordem n, $f^{(n)}$ contínua em I e derivável no interior de I.

Vamos usar esta última igualdade para calcular a representação decimal do número "e" até a décima casa. Pondo $P_n(x) \doteq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^k$ e $R_n \doteq \exp - P_n$, segue-se de (6) que, para $x = 1$, existe $c \in (0, 1)$ tal que $R_n(1) = \frac{\exp(c)}{(n+1)!}$. Encontremos n tal que $|R_n(1)| < 10^{-11}$. Como $|R_n(1)| = |\frac{\exp(c)}{(n+1)!}| \leqslant \frac{3}{(n+1)!}$, basta tomarmos n tal que $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-11}$, i.e. $(n+1)! > 3 \times 10^{11} \Leftrightarrow n \geqslant 14$. Portanto, para $n = 14$,

$$P_{14}(1) = \frac{47395032961}{17435658240}$$

é um número racional e $|\exp(1) - P_{14}(1)| < 10^{-11}$. Representando-se a referida fração na forma decimal e truncando-se na décima primeira casa, obtém-se $P_{14}(1) = 2,71828182845\ldots$. Conclui-se, portanto, que a representação decimal do número "e" coincide, até a décima casa, com:

$$2,7182818284$$

(ii) Aplicando o teorema anterior ao exemplo 4.2.2, com $x_0 = 0$, segue-se que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}, 0 < |c| < |x|$ tal que:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + \frac{\sin^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!}\, x^{2n+3}. \tag{7}$$

Vamos usar esta última igualdade para representar $\sin(1)$ até a décima casa decimal. Pondo $P_{2n+2}(x) \doteq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}$ e $R_{2n+2} \doteq \sin - P_{2n+2}$, segue-se de (7) que, para $x = 1$, existe $c \in (0, 1)$ tal que $R_{2n+2}(1) = \frac{\sin^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!}$. Encontremos n tal que $|R_{2n+2}(1)| < 10^{-11}$. Como $|R_{2n+2}(1)| = |\frac{\sin^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!}| \leqslant \frac{1}{(2n+3)!}$, basta tomarmos n tal que $\frac{1}{(2n+3)!} < 10^{-11}$, i.e. $(2n+3)! > 10^{11} \Leftrightarrow 2n + 3 \geqslant 15 \Leftrightarrow n \geqslant 6$. Mais precisamente, para $n = 6$, tem-se $(2n+3)! = 15! > 10^{12}$. Portanto, $P_{14}(1)$ é um número racional e $|\sin(1) - P_{14}(1)| < 10^{-12}$. Como

$$P_{14}(1) = \frac{209594293}{249080832} = \\ = 0,8414709848\overline{086584197695308806419917531028642139753250864361975473}$$

conclui-se que $\sin 1$ coincide, até a décima casa decimal, com

$$0,8414709848$$

§6. FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO INFINITESIMAL

Nos teoremas abaixo, será mostrado que, dada uma função real a valores reais f derivável até ordem n numa vizinhança de um ponto x_0 pertencente ao seu domínio, o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 é a única função polinomial P, de grau menor ou igual a n, tal que o resto $R \doteq f - P$ tem a propriedade de "tender a zero mais rapidamente do que $(x - x_0)^n$ quando x tende a x_0" (ou seja, tal que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0$). É neste sentido que dissemos, na introdução, que o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 é o polinômio de grau menor ou igual a n que melhor aproxima f numa vizinhança de x_0.

Proposição 6.1 (Fórmula de Taylor de ordem 1, com resto infinitesimal). *Sejam $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ contínua em x_0.*

(i) *Se f for derivável em x_0 e R_1 for a diferença entre f e o seu polinômio de Taylor de ordem 1 em x_0, então $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x-x_0} = 0$;*

(ii) *Reciprocamente, se P for uma função polinomial de grau menor ou igual a 1 e $R \doteq f - P$ satisfizer $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = 0$, então f é derivável em x_0 e P é o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em x_0.*

Demonstração. (i) Com efeito, suponha que f seja derivável em x_0, i.e. existe $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Então, como $\big(\forall\, x \in A \setminus \{x_0\}\big)\ \frac{R_1(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$, segue-se $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x-x_0} = 0$.

(ii) Reciprocamente, seja:

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & a(x-x_0)+b \end{array},$$

$a, b \in \mathbb{R}$, uma função polinomial tal que, se $R = f - P$, então $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = 0$. Em particular, isto implica $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0$; como f é contínua, segue-se $b = f(x_0)$. Logo, $\big(\forall\, x \in A \setminus \{x_0\}\big)\ \frac{R(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a$. Como $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = 0$, conclui-se que f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = a$, portanto P é o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em x_0.

$\square$

Teorema 6.2 (Fórmula de Taylor de ordem n, com resto infinitesimal). *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Suponha que f seja derivável até ordem $(n-1)$ e que $f^{(n-1)}$ seja derivável em x_0. Então:*

(i) *Se R_n é a diferença entre f e o seu polinômio de Taylor de ordem n em x_0, então $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$;*

(ii) *Reciprocamente, se P for uma função polinomial de grau menor ou igual a n e $R \doteq f - P$ satisfizer $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, então P é o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0.*

Demonstração. Será feita por indução sobre n.

(1) Para $n=1$, vide proposição anterior.

(2) Seja $k \geqslant 2$, e suponha que (i) e (ii) sejam verdadeiras para $n \leqslant k-1$. Provemos que também serão verdadeiras para $n=k$. Com efeito:

(i) Se $\big(\forall\, x \in A\big)\ R_k(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$, então $R_k : A \to \mathbb{R}$ é derivável e $\big(\forall\, x \in A\big)\ R_k'(x) = f'(x) - \sum_{j=1}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{(j-1)!}(x-x_0)^{j-1} = f'(x) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(f')^{(m)}}{m!}(x-x_0)^m$. Portanto, pela hipótese de indução, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{R_k'(x)}{(x-x_0)^{k-1}} = 0$. Assim, como $\lim\limits_{x\to x_0} R_k(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to x_0} (x-x_0)^k = 0$, a regra de l'Hôpital implica $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{R_k(x)}{(x-x_0)^k} = 0$.

(ii) Suponha $\big(\forall\, x \in A\big)\ f(x) = P(x) + R_k(x)$, com grau $P \leqslant k$ e $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{R_k(x)}{(x-x_0)^k} = 0$. Isto implica $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{R_k(x)}{(x-x_0)^m} = 0$, para $0 \leqslant m \leqslant k$. Sejam $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que $\big(\forall\, x \in \mathbb{R}\big)\ P(x) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n(x-x_0)^n + a_k(x-x_0)^k$. Definamos $\widetilde{P}(x) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n(x-x_0)^n$, de forma que, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \widetilde{P}(x) + a_k(x-x_0)^k + R(x). \tag{8}$$

Como $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{a_k(x-x_0)^k + R(x)}{(x-x_0)^{k-1}} = 0$ e grau $\widetilde{P} \leqslant k-1$, pela hipótese de indução conclui-se que $\widetilde{P}$ é o polinômio de Taylor de ordem $(k-1)$ de f em x_0, i.e. $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ para $0 \leqslant n \leqslant k-1$. Resta mostrar $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Afirmo que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-\widetilde{P}(x)}{(x-x_0)^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Com efeito, para cada $j \in \{0, \ldots, k-2\}$, $\lim\limits_{x\to x_0} [f^{(j)}(x) - \widetilde{P}^{(j)}(x)] = 0$ e $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{d^j}{dx^j}[(x-x_0)^k] = \lim\limits_{x\to x_0} k(k-1)\cdots(k-j+1)(x-x_0)^{k-j} = 0$. Como $f^{(k-1)}$ é derivável em x_0 (por hipótese) e $\widetilde{P}^{(k-1)}(x) = cte. = f^{(k-1)}(x_0)$, temos $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f^{(k-1)}(x) - \widetilde{P}^{(k-1)}(x)}{k!(x-x_0)} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$; logo, aplicando-se $(k-1)$ vezes a regra de l'Hôpital, prova-se a afirmação. Por outro lado, de (8) segue-se $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-\widetilde{P}(x)}{(x-x_0)^k} = \lim\limits_{x\to x_0} [a_k + \frac{R_k(x)}{(x-x_0)^k}] = a_k$; portanto, pela unicidade do limite, conclui-se $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, logo P é o polinômio de Taylor de ordem k de f em x_0.

$\square$

§7. FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO INTEGRAL

Deduziremos, nesta seção, uma fórmula integral para o resto da fórmula de Taylor de ordem n de uma função derivável até ordem $n+1$, cuja derivada de ordem $n+1$ seja Riemann-integrável.

Seja $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivável até 2a. ordem, com $\phi'' : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrável. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t)dt$$

Faremos uma integração por partes da seguinte maneira: pomos $f = \phi'$, $g(t) \doteq 1 - t$, de modo que $fg' = -\phi$; assim, $\int_0^1 \phi'(t)dt = -\int_0^1 f(t)g'(t)dt = -f(t)g(t)]_0^1 + \int_0^1 f'(t)g(t)dt$, ou seja:

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(0) + \int_0^1 (1-t)\phi''(t)dt$$

Se ϕ'' tiver derivada Riemann-integrável, continuamos a integrar por partes... suponha, assim, que $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivável até ordem $n+1$ (dado $n \in \mathbb{N}$), e que $\phi^{(n+1)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ seja Riemann-integrável. Mostraremos, por indução em n, que:

$$\phi(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \phi^{(n+1)}(t)dt \tag{9}$$

Com efeito:

1. Para $n = 0$, (9) é o Teorema Fundamental do Cálculo.

2. Admita que (9) seja válida para $n = p \in \mathbb{N}$. Seja $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivável até ordem $p+2$ e suponha que $\phi^{(p+2)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ seja Riemann-integrável. Em particular, $\phi^{(p+1)}$ é contínua, portanto Riemann-integrável; pela hipótese de indução, tem-se: $\phi(1) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} \phi^{(p+1)}(t)dt$. Tome $f \doteq \phi^{(p+1)}$ e $g(t) \doteq \frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!}$. Então $f(t)g'(t) = -\frac{(1-t)^p}{p!} \phi^{(p+1)}(t)$. Logo, integrando por partes, obtemos: $\int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} \phi^{(p+1)}(t)dt = -f(t)g(t)]_0^1 + \int_0^1 f'(t)g(t)dt = \frac{\phi^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+2)}(t)dt$, donde se conclui que (9) vale para $n = p+1$.

Como consequência imediata de (9), obtém-se o seguinte teorema:

Teorema 7.1 (Fórmula de Taylor de Ordem n, com Resto Integral). *Sejam $a, h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ derivável até ordem $n+1$, com $f^{(n+1)}$ Riemann-integrável no intervalo $[a, a+h]$. Então:*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \Big[\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+th)dt\Big] h^{n+1} \tag{10}$$

Demonstração. Definamos $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $\phi(t) \doteq f(a+th)$. Então, aplicando-se a regra da cadeia sucessivas vezes, conclui-se que ϕ é derivável até ordem $n+1$ e, para $0 \leqslant k \leqslant n$, $\phi^{(k)}(t) = f^{(k)}(a+th)h^k$. Em particular, $\phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(a+th)h^{n+1}$ é Riemman-integrável. Assim, por (9), demonstrada acima, obtém-se (10).

$\square$