MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 11 - Integral de Bochner (opcional)`

Fixemos um espaço de medida completo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ até o final desta lista.
As duas primeiras questões foram enunciadas na lista 6 (exercícios complementares 1 e 2).

Questão 1-) Sejam Y espaço metrizável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis $X \to Y$ que converge μ-q.s. para $f : X \to Y$. Então f é mensurável.

Definição 1 (funções simples). Sejam (Y, τ_Y) espaço topológico e $f : X \to Y$. Diz-se que f é *simples* se for mensurável e tiver imagem finita.

Questão 2-) Sejam (Y, τ_Y) espaço metrizável e separável. Se $f : X \to Y$ for mensurável, existe uma sequência de funções simples $X \to Y$ que converge pontualmente para f. Observação. aqui o espaço de medida não precisa ser completo.

Questão 3-) Sejam Y espaço de Banach (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $A(\mu, Y) \doteq \{f : X \to Y \text{ mensurável} | \exists Z \subset Y \text{ subespaço separável com } \mu\big(f^{-1}(Y \setminus Z)\big) = 0\}$. Então $A(\mu, Y)$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de Y^X.

Definição 2. Com a notação acima, os elementos de $A(\mu, Y)$ chamam-se *funções mensuráveis com imagem essencialmente separável*.

Questão 4-) Sejam Y espaço de Banach e $A(\mu, Y)$ como acima. Mostre que:

a) $A(\mu, Y)$ é fechado por convergência μ-q.s., i.e. se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec A(\mu, Y)$ converge μ-q.s. para $f : X \to Y$, então $f \in A(\mu, Y)$.

b) Para toda $f \in A(\mu, Y)$, existe $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções simples $X \to Y$ que converge μ-q.s. para f e, $(\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N})\|\phi_n(x)\| \leq 2\|f(x)\|$.

Definição 3. Sejam Y espaço de Banach e $f \in A(\mu, Y)$. Definimos $\|f\|_1 \doteq \int \|f\| \,\mathrm{d}\mu$.
Note que $\|f\| : X \to \mathbb{R}$ é mensurável, portanto a definição faz sentido.

Definição 4. Dado Y espaço de Banach, definimos $\mathsf{L}^1(\mu, Y) \doteq \{f \in A(\mu, Y) | \|f\|_1 < \infty\}$.

Questão 5-) Com a notação acima, $\mathsf{L}^1(\mu, Y)$ é $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de $A(\mu, Y)$ e $\|\cdot\|_1 : \mathsf{L}^1(\mu, Y) \to \mathbb{R}$ é uma seminorma. O subespaço $N \doteq \{f \in \mathsf{L}^1(\mu, Y) | \|f\|_1 = 0\}$ coincide com o subconjunto de $A(\mu, Y)$ formado pelas funções nulas quase sempre. O quociente $\mathsf{L}^1(\mu, Y)/N$ com a norma induzida é completo, i.e. um espaço de Banach.

Notação. Usaremos, como é de praxe, a mesma notação $\mathsf{L}^1(\mu, Y)$ para o quociente.

Com a notação das definições e questões anteriores, dados Y espaço de Banach e $f \in \mathsf{L}^1(\mu, Y)$, gostaríamos de definir a integral de f, $\int f \,\mathrm{d}\mu$, como sendo um elemento de Y. A ideia natural é defini-la como sendo um elemento $\ell \in Y$ tal que $(\forall \alpha \in Y^*)\langle \alpha, \ell \rangle = \int \alpha \circ f \,\mathrm{d}\mu$, caso exista um tal elemento; se existir, será único pelo teorema de Hahn-Banach. Para provar a existência, use o roteiro proposto na questão abaixo:

Questão 6-) Com a notação acima, tem-se:

i) Dada $f \in \mathsf{L}^1(\mu, Y)$, defina $\sigma(f) : Y^* \to \mathbb{K}$ por $\langle \alpha, \sigma(f) \rangle \doteq \int \alpha \circ f \,\mathrm{d}\mu$. Então $\sigma(f)$ está bem definida e é linear contínua, i.e. $\sigma(f) \in Y^{**}$. Fica bem definida, pois, $\sigma : \mathsf{L}^1(\mu, Y) \to Y^{**}$.

ii) Dada $f \in \mathsf{L}^1(\mu, Y)$, verifique que $\sigma(f) : Y^* \to \mathbb{K}$ é $\sigma(Y^*, Y)$-contínua (i.e. contínua em Y^* com a topologia fraca-$*$). Sugestão: Este é o ponto delicado do argumento. Siga o seguinte subroteiro:

   a) Redução: pode-se assumir Y separável.

   b) $\sigma(f) : Y^* \to \mathbb{K}$ é sequencialmente $\sigma(Y^*, Y)$-contínua (use o teorema da convergência dominada; a dominação será feita com o uso do princípio da limitação uniforme [PLU]).

   c) use o teorema de Krein-Smulian (vide [1], teorema 12.1, página 259, e corolário 12.8, página 161) para concluir que $\sigma(f) : Y^* \to \mathbb{K}$ é $\sigma(Y^*, Y)$-contínua.

iii) Segue do item anterior que a imagem de $\sigma : \mathsf{L}^1(\mu, Y) \to Y^{**}$ está contida em $Y \subset Y^{**}$.

Definição 5 (integral de Bochner). Com a notação acima, dada $f \in \mathsf{L}^1(\mu, Y)$, defina $\int f \,\mathrm{d}\mu \doteq \sigma(f) \in Y$.

Note que $\int f \,\mathrm{d}\mu$ satisfaz $(\forall \alpha \in Y^*)\langle \int f \,\mathrm{d}\mu, \alpha\rangle = \int \langle f, \alpha\rangle \,\mathrm{d}\mu$ e, por Hahn-Banach, é o único elemento de Y com esta propriedade.

Questão 7 (propriedades da integral de Bochner)**-)** Seja Y espaço de Banach.

i) $\int \cdot : \mathsf{L}^1(\mu, Y) \to Y$ é linear.

ii) (desigualdade triangular) $\forall f \in \mathsf{L}^1(\mu, Y)$, $\|\int f \,\mathrm{d}\mu\| \leq \int \|f\| \,\mathrm{d}\mu$.

iii) Sejam $f \in \mathsf{L}^1(\mu, Y)$ e Z subespaço fechado de Y tal que $f^{-1}(Y \setminus Z)$ tem medida nula. Então $\int f \,\mathrm{d}\mu \in Z$.

iv) Sejam Z espaço de Banach e $T : Y \to Z$ linear contínua. Para toda $f \in \mathsf{L}^1(\mu, Y)$, $T \circ f \in \mathsf{L}^1(\mu, Z)$ e $\int T \circ f \,\mathrm{d}\mu = T \cdot \int f \,\mathrm{d}\mu$.

v) Se $f : X \to Y$ é uma função simples, então $f \in \mathsf{L}^1(\mu, Y)$ *see* $(\forall a \in F \setminus \{0\})\ \mu\big(f^{-1}(a)\big) < \infty$. Em caso afirmativo, e se $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, com $(a_i)_{1\leq i\leq n} \prec Y$ e $(A_i)_{1\leq i\leq n} \prec \mathcal{M}$, então $\int f = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$.

Questão 8 (teorema da convergência dominada)**-)** Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathsf{L}^1(\mu, Y)$ convergente μ-q.s. para $f : X \to Y$ e $g \in \mathsf{L}^1(\mu)$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})\|f_n\| \leq g$ μ-q.s. em X. Então $f \in \mathsf{L}^1(\mu, Y)$ e $f_n \xrightarrow{\mathsf{L}^1} f$; em particular, $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu$.

Questão 9-) Seja $f : X \to Y$. São equivalentes:

i) $f \in \mathsf{L}^1(\mu, Y)$.

ii) existe $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathsf{L}^1(\mu, Y)$ sequência de funções simples integráveis que converge μ-q.s. para f e $\int \|f - \phi_n\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$.

Em caso afirmativo, tomando $(\phi_n)_n$ como na segunda condição, $\int \phi_n \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu$.

Questão 10-) Seja Y espaço de Banach separável. As seguintes σ-álgebras de subconjuntos de Y coincidem:

i) $\mathcal{B}_Y$.

ii) $\mathcal{W}_Y \doteq \sigma$-álgebra induzida por Y^* (recorde a definição da σ-álgebra induzida por uma família de aplicações, c.f. notas da aula 2).

iii) $\mathcal{B}_{\left(Y, \sigma(Y, Y^*)\right)}$, i.e. a σ-álgebra de Borel de Y munido da topologia fraca.

Sugestão: É claro que $\mathcal{W}_Y \subset \mathcal{B}_{\left(Y,\sigma(Y,Y^*)\right)} \subset \mathcal{B}_Y$. Para verificar $\mathcal{B}_Y \subset \mathcal{W}_Y$, tendo em vista que Y é separável ($\therefore$ todo aberto é união enumerável de bolas abertas), é suficiente mostrar que toda bola aberta é mensurável com respeito a $\mathcal{W}_Y$. Para tal, mostre que $\mathcal{W}_Y$ é invariante por translações, e que toda bola aberta centrada na origem é mensurável com respeito a $\mathcal{W}_Y$. Finalmente, para mostrar a última afirmação: tome $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ subconjunto enumerável denso em Y e $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec Y^*$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})\|\lambda_n\| = 1$ e $\langle \lambda_n, x_n\rangle = \|x_n\|$. Verifique[1] que $(\forall x \in Y)\|x\| = \sup\{|\langle \lambda_n, x\rangle| : n \in \mathbb{N}\}$ e conclua que $\|\cdot\|$ é mensurável com respeito a $\mathcal{W}_Y$.

Questão 11-) Sejam Y espaço de Banach e $f : X \to Y$ com imagem essencialmente separável, i.e. tal que $\exists Z \subset Y$ subespaço separável com $f^{-1}(Y \setminus Z)$ nulo. São equivalentes:

a) f é mensurável, i.e. $f \in A(\mu, Y)$.

b) $(\forall \alpha \in Y^*)\, \alpha \circ f$ é mensurável.

Sugestão: É corolário da questão anterior e da proposição 3 das notas da aula 2.

Questão 12 (teorema de Fubini para a integral de Bochner)**-)** Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos e completos, e $(X \times Y, \overline{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}, \lambda)$ o completamento de $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$. Sejam E espaço de Banach e $f \in \mathsf{L}^1(\lambda, E)$. Então:

i) para μ-q.t. $x \in X$, $f_x \doteq f(x, \cdot) : E \to \mathbb{K}$ é Bochner-integrável, i.e. está em $\mathsf{L}^1(\nu, E)$, e a função definida μ-quase sempre $x \mapsto \int f_x(y) \,\mathrm{d}\nu(y) \in E$ é Bochner integrável. Enunciado análogo para seções "f^y".

[1] agradecimento ao Daniel Tausk por esta sugestão.

ii) A integral de f pode ser calculada fazendo-se integrações iteradas:

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda = \int \Big(\int f_x(y) \,\mathrm{d}\nu(y) \Big) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int \Big(\int f^y(x) \,\mathrm{d}\mu(x) \Big) \,\mathrm{d}\nu(y).$$

SUGESTÃO: Combine: uma generalização da proposição 2.12 do Folland, o teorema de Fubini-Tonelli para funções escalares, a questão anterior e o teorema de Hahn-Banach.

Referências

[1] J. CONWAY, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1994.