MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

http://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798
Lista 9

Fixemos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ até o final desta lista.

Definição 1 (modos de convergência). Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis em X e f função mensurável em X (digamos, a valores em $\mathbb{C}$). Diz-se que:

[P] $(f_n)_n$ converge *pontualmente* para f (notação: $f_n \overset{p.}{\to} f$) se $\forall\epsilon > 0, \forall x \in X, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

[U] $(f_n)_n$ converge *uniformemente* para f (notação: $f_n \overset{u.}{\to} f$) se $\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

[AE] $(f_n)_n$ converge *quase sempre* para f (notação: $f_n \to f\ \mu\, a.e.$) se $\exists N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N^c) = 0$ e $f_n \overset{p.}{\to} f$ em N, i.e. se $\exists N \in \mathcal{M} | \mu(N^c) = 0, \forall\epsilon > 0, \forall x \in N, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

[AU] $(f_n)_n$ converge *quase uniformemente* para f (notação: $f_n \overset{a.u.}{\to} f$) se $\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathcal{M} | \mu(N^c) < \epsilon$ e $f_n \overset{u.}{\to} f$ em N.

[L^∞] $(f_n)_n$ converge *em* L^∞ para f (notação: $f_n \overset{\mathsf{L}^\infty}{\to} f$) se $\exists N \in \mathcal{M} | \mu(N^c) = 0, f_n \overset{u.}{\to} f$ em N.

[L^1] $(f_n)_n$ converge *em* L^1 para f (notação: $f_n \overset{\mathsf{L}^1}{\to} f$) se $\int |f_n - f| \to 0$.

[M] $(f_n)_n$ converge *em medida* para f (notação: $f_n \overset{m.}{\to} f$) se $\forall\epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) = 0$.

Questão 1-) $f_n \overset{a.u.}{\to} f$ ***see*** $\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathcal{M} | \mu(N^c) < \epsilon, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Questão 2-) $f_n \overset{\mathsf{L}^\infty}{\to} f$ ***see*** $\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathcal{M} | \mu(N^c) = 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Questão 3-) $f_n \overset{m.}{\to} f$ ***see*** $\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) < \epsilon$.

Questão 4-) Se $f_n \to f\ \mu\, a.u.$, então $f_n \overset{a.e.}{\to} f$ e $f_n \overset{m.}{\to} f$.

Questão 5-) Se $f_n \to f\ \mu\, a.e.$ e a convergência é dominada, então $f_n \overset{a.u.}{\to} f$.

Questão 6-) Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis em X e f função mensurável em X. Diz-se que $f_n \to f$ *em* L^1 *rapidamente* se $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f\|_1 < \infty$. Prove que, se este for o caso, então $f_n \overset{a.u.}{\to} f$.

Questão 7-) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mensurável. Então:

a) $\forall s \in \mathbb{R}$, $\tau_s f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\tau_s f(x) \doteq f(x - s)$ é Lebesgue mensurável e $\int \tau_s f(x)\, \mathrm{d}m(x) = \int f(x)\, \mathrm{d}m(x)$ se $f \in \mathsf{L}^+$ ou f integrável.

b) $\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mu_r f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\mu_r f(x) \doteq f(r^{-1}x)$ é Lebesgue mensurável e $\int \mu_r f(x)\, \mathrm{d}m(x) = |r| \int f(x)\, \mathrm{d}m(x)$ se $f \in \mathsf{L}^+$ ou f integrável.

Questão 8-) Sejam X conjunto e $f : X \to [0, \infty]$. Defina a soma não ordenada de f como na questão 2 da lista 7, i.e. $\sum_X f \doteq \sup\{\sum_{x\in F} f(x) | F \subset X \text{ finito}\}$ (ou, equivalentemente, pela definição da lista 8). Mostre que $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ dada por $\mu(A) \doteq \sum_A (f|_A)$ é uma medida. Note que, como casos particulares, obtém-se a medida de contagem (f constante e igual a 1) e a medida de Dirac centrada em $x_0 \in X$ (f igual a 1 em x_0 e 0 no complementar). Sugestão: Use a questão 2 da lista 7 e a questão 14) da seção 2.2 (também na lista 7).

Questão 9-) Na questão anterior, verifique que:

a) μ é semifinita ***see*** $(\forall x \in X) f(x) < \infty$.

b) μ é σ-finita ***see*** for semifinita e $\{x \in X | f(x) > 0\}$ for enumerável.

Questão 10-) Seja $(\mu_i)_{i\in I}$ uma família de medidas em $(X, \mathcal{M})$. Defina $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ por $\mu(E) \doteq \sum_{i\in I} \mu_i(E)$. Mostre que μ é uma medida e, $\forall f \in \mathsf{L}^+$, $\int f\, \mathrm{d}\mu = \sum_{i\in I} \int f\, \mathrm{d}\mu_i$. Sugestão: Lembre que a soma não ordenada é a integral com respeito à medida de contagem. Verifique a σ-aditividade em duas etapas: 1) vale a aditividade finita; 2) vale a continuidade para cima (use o teorema da conv. monótona), e isso implica, pelo ex. 11 da lista 3, a σ-aditividade.

Questão 11-) Seja $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de medidas $\mathcal{M} \to [0,\infty]$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})\mu_n \leq \mu_{n+1}$ (i.e. $\forall E \in \mathcal{M}, \mu_n(E) \leq \mu_{n+1}(E)$). Defina $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ por $\mu(E) \doteq \lim \mu_n(E)$. Então μ é uma medida e, $\forall f \in \mathsf{L}^+, \int f\, \mathrm{d}\mu = \lim \int f\, \mathrm{d}\mu_n$.

Questão 12-) Dê exemplos de sequências $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções mensuráveis em X tais que:

1. $(f_n)_n$ converge quase uniformemente, mas não converge em L^1.
2. $(f_n)_n$ converge em medida, mas não converge μ-q.s.
3. $(f_n)_n$ converge μ-q.s., mas não converge quase uniformemente.

Seção 2.4

32-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida finito. Dadas $f, g : X \to \mathbb{C}$ mensuráveis, defina:

$$\rho(f,g) \doteq \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, \mathrm{d}\mu$$

Então, identificando funções que coincidem q.s., ρ define uma métrica no conjunto das funções mensuráveis e $f_n \to f$ com respeito a esta métrica ***see*** $f_n \to f$ em medida.

33-) Se $f_n \geqslant 0$ e $f_n \to f$ em medida, então $\int f \leqslant \liminf \int f_n$.

34-) Suponha $|f_n| \leqslant g \in \mathsf{L}^1$ e $f_n \to f$ em medida. Então:

(a) $\int f = \lim \int f_n$.
(b) $f_n \to f$ em L^1.

35-) $f_n \to f$ em medida ***see*** $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \geqslant N)\, \mu(\{x | |f_n(x) - f(x)| \geqslant \epsilon\}) < \epsilon$.

36-) Se $(\forall n \in \mathbb{N})\, \mu(E_n) < \infty$ e $\chi_{E_n} \to f$ em L^1, então f coincide q.s. com a função característica de um conjunto mensurável.

37-) Sejam $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ mensuráveis e $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(a) Se ϕ for contínua e $f_n \to f$ q.s., então $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ q.s.
(b) Se ϕ for uniformemente contínua e $f_n \to f$ uniformemente (resp. quase uniformemente, em medida), então $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ uniformemente (resp. quase uniformemente, em medida).

38-) Suponha $f_n \to f$ e $g_n \to g$ em medida.

(a) $(f_n + g_n) \to f + g$ em medida.
(b) $f_n g_n \to fg$ em medida se $\mu(X) < \infty$, mas não necessariamente se $\mu(X) = \infty$.

39-) Se $f_n \to f$ quase uniformemente, então $f_n \to f$ q.s. e em medida.

40-) No teorema de Egorov, a hipótese "$\mu(X) < \infty$" pode ser substituída por "$|f_n| \leqslant g$, onde $g \in \mathsf{L}^1$".

41-) Se μ é σ-finita e $f_n \to f$ q.s., existem mensuráveis $E_1, E_2, \ldots \subset X$ tais que $\mu((\cup_1^\infty E_n)^c) = 0$ e $f_n \to f$ uniformemente em cada E_n.

42-) Seja μ a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Então $f_n \to f$ em medida ***see*** $f_n \to f$ uniformemente.

43-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida finito e $f : X \times [0,1] \to \mathbb{C}$ tal que $(\forall x \in X)\, f(x, \cdot)$ seja contínua e $(\forall y \in [0,1])\, f(\cdot, y)$ seja mensurável.

(a) Dados $0 < \epsilon, \delta < 1$, $E_{\epsilon,\delta} \doteq \{x \in X | |f(x,y) - f(x,0)| \leqslant \epsilon$ para $y < \delta\}$ é mensurável.
(b) Para todo $\epsilon > 0$, existe $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E^c) < \epsilon$ e $f(\cdot, y) \to f(\cdot, 0)$ uniformemente em E quando $y \to 0$.

44-) (Teorema de Lusin) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mensurável. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um compacto $K \subset [a,b]$ tal que $m([a,b] \setminus K) < \epsilon$ e $f|_K$ é contínua.