# MAT 5798 – Medida e Integração
# IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 8`

**Questão 1-)** Sejam $\mu$ e $\nu$ medidas num espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$. Mostre que, $(\forall f \in \mathsf{L}^+) \int f \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int f \, \mathrm{d}\nu$. Conclua que $\mathsf{L}^1(\mu + \nu) = \mathsf{L}^1(\mu) \cap \mathsf{L}^1(\nu)$.

**Questão 2-)** Sejam $\phi : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ aplicação mensurável, $\mu$ medida em $(X, \mathcal{M})$ e $\phi_*\mu$ o pushforward de $\mu$ por $\phi$. Mostre que, para toda $f$ em $\mathsf{L}^+(Y, \mathcal{N})$, $\int f \, \mathrm{d}(\phi_*\mu) = \int f \circ \phi \, \mathrm{d}\mu$. Conclua que, para toda $f \in \mathsf{L}^1(\phi_*\mu)$, $f \circ \phi \in \mathsf{L}^1(\mu)$ e vale a mesma igualdade entre as integrais.

**Questão 3-)** Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $\overline{\mu}$ o completamento de $\mu$. Mostre que $\mathsf{L}^1(\mu) \equiv \mathsf{L}^1(\overline{\mu})$.

Definição 1 (soma não ordenada). Sejam $X$ um conjunto e $f : X \to \mathbb{C}$. Diz-se que $f$ é *somável* se existir $z \in \mathbb{C}$ tal que, $\forall \epsilon > 0, \exists F_0 \subset X$ finito, $\forall F \supset F_0$ finito, $|\sum_{x \in F} f(x) - z| < \epsilon$. Se existir tal $z$, ele é único e se chama *soma não ordenada* de $f$ (notação: $\sum_X f$).

Observação. Alternativamente, pode-se definir a noção de somabilidade e a soma não ordenada através da seguinte condição equivalente à usada na definição acima: tome $\mathcal{F} \doteq \{A \subset X | A \text{ finito}\}$, ordenado pela inclusão; então $\mathcal{F}$ é um conjunto dirigido e $\left(\sum_{x \in A} f(x)\right)_{A \in \mathcal{F}}$ é um net a valores em $\mathbb{C}$ (chamado *net das somas parciais de* $f$), e $f$ é somável no sentido da definição acima, com soma $z \in \mathbb{C}$, ***see*** o net em questão converge para $z$.

**Questão 4-)** Com a notação da definição acima, dada $f : X \to \mathbb{C}$, $f$ é somável se, e somente se, for integrável com respeito à medida de contagem; em caso afirmativo, a soma não ordenada e a integral de f com respeito à medida de contagem coincidem.

**Questão 5-)** Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $Y \doteq \{\varphi : X \to \mathbb{C} : \varphi \text{ simples e integrável}\}$. Então $Y$ é denso em $L^1(\mu)$.

**Questão 6-)** Considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ com $\mu$ medida de Lebesgue-Stieltjes. Tem-se:

(i) $\tilde{Y} \doteq \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ simples integrável da forma $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{I_i}$, com $(\forall i) I_i$ intervalo aberto$\}$ é denso em $L^1(\mu)$

(ii) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua tal que $\operatorname{supp} f \doteq \overline{\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}} \subset\subset \mathbb{R}\}$ (i.e. o conjunto das funções contínuas com suporte compacto) é denso em $L^1(\mu)$.

**Questão 7-)** Sejam $[a, b]$ intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $C^0([a, b], \mathbb{C}) \doteq \{f : [a, b] \to \mathbb{C} \text{ contínua}\}$ e

$$\begin{aligned} \| \cdot \|_1 : C^0([a, b], \mathbb{C}) &\to [0, \infty) \\ f &\mapsto \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

Então $\left(C^0([a, b], \mathbb{C}), \| \cdot \|_1\right)$ é um espaço normado e seu completamento é $\left(L^1([a, b], \mathcal{B}|_{[a,b]}, m), \| \cdot \|_1\right)$.
Sugestão: Tome $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrável, de modo que

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ 0 & \text{cc} \end{cases} \end{aligned}$$

é um elemento de $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$ e use (ii) da questão anterior.

**Questão 8-)** Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : X \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ tal que $(\forall z \in \mathcal{U}) \, f(\cdot, z) \in \mathsf{L}^1$, $(\forall x \in X) \, f(x, \cdot)$ é holomorfa. Suponha que exista $g \in \mathsf{L}^1$ tal que $(\forall z \in \mathcal{U}) \, |\partial_z f(x, z)| \leqslant g(x)$. Então $F : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ dada por $F(z) \doteq \int f(x, z) \, \mathrm{d}\mu(x)$ é holomorfa e, $(\forall z \in \mathcal{U}) \, F'(z) = \int \partial_z f(x, z) \, \mathrm{d}\mu(x)$.

**Questão 9-)** (função $\Gamma$) Sejam $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > 0$ e $f_z : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ dada por $f_z(t) \doteq t^{z-1} \, \mathrm{e}^{-t}$, onde $t^{z-1} = \exp[(z - 1) \log t]$.

(i) $(\forall z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z > 0) \, f_z \in \mathsf{L}^1(0, \infty)$.

(ii) $\Gamma : \{\operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$ dada por $\Gamma(z) \doteq \int_0^\infty t^{z-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$ é holomorfa.

(iii) $(\forall z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z > 0) \, \Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$. Sugestão: Integre por partes $\int_\epsilon^N t^z \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$, faça $\epsilon \to 0$ e $N \to \infty$.

(iv) Use o item anterior para estender $\Gamma$ a uma função holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{n | n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \leqslant 0\}$. Verifique que $\Gamma(1) = 1$ e, portanto, $(\forall n \in \mathbb{N}) \Gamma(n + 1) = n!$.

# 1 Seção 2.3

29-) (i) Mostre que $\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = n!$ diferenciando a identidade $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}x = 1/t$.
(ii) Mostre que $\int_{-\infty}^\infty x^{2n} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = (2n)!\sqrt{\pi}/4^n n!$ diferenciando a identidade $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-tx^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi/t}$.

30-) Mostre que $\lim_{k\to\infty} \int_0^k x^n(1-k^{-1}x)^k\,\mathrm{d}x = n!$.

31-) Expanda o integrando numa série e justifique a integração termo a termo para obter as seguintes fórmulas (o exercício 29 pode ser útil):

(a) Para $a > 0$, $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \cos ax\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-a^2/4}$.
(b) Para $a > -1$, $\int_0^1 x^a(1-x)^{-1}\log x\ \mathrm{d}x = -\sum_1^\infty (a+k)^{-2}$.
(c) Para $a > 1$, $\int_0^\infty x^{a-1}(\mathrm{e}^x - 1)^{-1}\,\mathrm{d}x = \Gamma(a)\zeta(a)$, onde $\zeta(a) = \sum_1^\infty n^{-a}$.
(d) Para $a > 1$, $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} x^{-1}\sin x\ \mathrm{d}x = \arctan(a^{-1})$.