MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 6`

Em todas as questões abaixo, $(X, \mathcal{M})$ é um espaço mensurável.

Questão 1-) Demonstre as proposições 2.11 e 2.12.

Questão 2-) Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, $f \geq 0$, e $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec (0, \infty)$ tal que $r_n \to 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \infty$. Então existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $(\forall x \in X) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \chi_{A_n}(x)$. Em particular, f é o limite pontual de uma sequência crescente de funções simples.

1 Seção 2.1

3-) Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis em X. Então $\{x \in X | \exists \lim f_n(x)\}$ é mensurável.

6-) O supremo de uma família não enumerável de funções mensuráveis $X \to \overline{\mathbb{R}}$ pode não ser mensurável.

11-) Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tal que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x, \cdot)$ é Borel-mensurável e $(\forall y \in \mathbb{R}) f(\cdot, y)$ é contínua. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ como segue. Para todo $i \in \mathbb{Z}$, ponha $a_i \doteq i/n$ e, para $a_i \leqslant x \leqslant a_{i+1}$:

$$f_n(x, y) \doteq \frac{f(a_i, y) \cdot (x - a_i) + f(a_{i+1}, y) \cdot (a_{i+1} - x)}{a_{i+1} - a_i}$$

Então $(\forall n \in \mathbb{N}) f_n$ é Borel-mensurável em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ e $f_n \to f$ pontualmente. Portanto, f é Borel-mensurável. Conclua, por indução em k, que toda função $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ separadamente contínua em cada variável é Borel-mensurável.

2 Exercícios Complementares (opcionais)

1-) Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável e (Y, τ_Y) espaço metrizável. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência de aplicações mensuráveis $X \to Y$, pontualmente convergente para $f : X \to Y$, então f é mensurável.

2-) Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável e (Y, τ_Y) espaço metrizável e separável. Se $f : X \to Y$ for mensurável, existe uma sequência de funções simples (i.e. mensuráveis e com imagens finitas) $X \to Y$ que converge pontualmente para f.

3-) Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável, (Y, τ_Y) espaço metrizável e separável, (Z, τ_Z) espaço metrizável e $\phi : X \times Y \to Z$ contínua como função da segunda coordenada e mensurável como função da primeira (i.e. $(\forall x \in X)\phi(x, \cdot)$ contínua e $(\forall y \in Y)\phi(\cdot, y)$ mensurável). Então ϕ é mensurável (munindo $X \times Y$ da σ-álgebra produto). Em particular, isso vale se X for um espaço topológico e ϕ for separadamente contínua.