MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 5`

Definição 1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto se diz um G_δ se for uma intersecção enumerável de abertos. Um conjunto se diz um F_σ se for uma união enumerável de fechados.

Questão 1-) (teoerema 1.18) Sejam $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ uma medida de Lebesgue-Stieltjes e $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ a medida exterior por ela induzida.

(i) $\forall E \subset \mathbb{R}$, $\mu^* E = \inf\{\mu(\mathcal{U}) | \mathcal{U}$ aberto e $E \subset \mathcal{U}\}$.
(ii) $\forall E \subset \mathbb{R}$, $\exists V \subset \mathbb{R}$ um G_δ tal que $E \subset V$ e $\mu^*(E) = \mu(V)$.
(iii) $\forall E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = \sup\{\mu(K) | K$ compacto e $K \subset E\}$.
(iv) $\forall E \in \mathcal{M}$, $\exists F \subset \mathbb{R}$ um F_σ tal que $F \subset E$ e $\mu(E) = \mu(F)$.

Questão 2-) (teorema 1.19) Sejam $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ uma medida de Lebesgue-Stieltjes e $E \subset \mathbb{R}$. São equivalentes:

(i) $E \in \mathcal{M}$.
(ii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ aberto tal que $E \subset \mathcal{U}$ e $\mu(\mathcal{U} \setminus E) < \epsilon$.
(iii) $E = V \setminus N$, onde $V \subset \mathbb{R}$ é um G_δ e $\mu(N) = 0$.
(iv) $\forall \epsilon > 0$, $\exists F \subset \mathbb{R}$ fechado tal que $F \subset E$ e $\mu(E \setminus F) < \epsilon$.
(v) $E = H \cup N$, onde $H \subset \mathbb{R}$ é um F_σ e $\mu(N) = 0$.

Definição 2. Dados $E \subset \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}$, $E + r \doteq \{x + r | x \in E\}$ e $rE \doteq \{rx | x \in E\}$.

Questão 3-) (teorema 1.21) Seja $m : \mathcal{L} \to [0, \infty]$ a medida de Lebesgue (i.e. a medida de Lebesgue-Stieltjes induzida pela identidade). Se $E \in \mathcal{L}$, então, $\forall r \in \mathbb{R}$:

(i) $E + r \in \mathcal{L}$ e $m(E + r) = m(E)$;
(ii) $rE \in \mathcal{L}$ e $m(rE) = |r| m(E)$.

1 Seção 1.5

26-) Sejam $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\mu, \mu)$ espaço de medida de Lebesgue-Stieltjes e $E \in \mathcal{M}_\mu$ tal que $\mu(E) < \infty$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $A \subset \mathbb{R}$ reunião finita disjunta de intervalos abertos tal que $\mu(E \Delta A) < \epsilon$.

28-) Seja μ_F a medida de Lebesgue-Stieltjes associada a $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua pela direita. Então: $\mu_F(\{a\}) = F(a) - F(a-)$, $\mu_F([a, b)) = F(b-) - F(a-)$, $\mu_F([a, b]) = F(b) - F(a-)$ e $\mu_F((a, b)) = F(b-) - F(a)$.

2 Exercícios Complementares (opcionais)

1-) Todo $x \in [0, 1]$ admite uma representação na base 3 da forma $0.x_1x_2\cdots$, i.e. existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \{0, 1, 2\}$ tal que $x = \sum_1^\infty x_n 3^{-n}$. Tal representação diz-se *finita* ou *eventualmente nula* se existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ para todo $n > N$; caso contrário, diz-se que a representação é *infinita*. Tem-se:

(i) $x \in [0, 1]$ admite uma representação finita $x = 0.x_1x_2\cdots$ na base 3 `see` $\exists n \in \mathbb{N}, \exists k \in \{0, \ldots, 3^n - 1\}$ tais que $x = k3^{-n}$.
(ii) todo $x \in]0, 1]$ admite única representação infinita na base 3 $x = 0.x_1x_2\cdots$.

Definição 3. Com a notação da questão anterior, associemos a cada $x \in [0, 1]$ uma representação na base 3, $x = 0.x_1x_2\cdots$, da seguinte forma:

(i) se x não admitir representação finita, associemos a x a única representação possível;
(ii) se x admitir representação finita $0.x_1\cdots x_N 0\cdots$, com $x_N \neq 0$ e $x_n = 0$ para $n > N$: se $x_N = 2$, associemos a x a referida representação; se x_N for 1, associemos a x a representação infinita, i.e. $0.x_1\cdots x_{N-1}0222\cdots$.

Chamemos tais representações de *normalizadas.*

2-) Seja C o conjunto ternário de Cantor.

(i) C é compacto, não-vazio, magro (i.e. seu fecho tem interior vazio), totalmente desconexo (i.e. os únicos subconjuntos conexos de C são pontos) e não tem pontos isolados.

(ii) $m(C) = 0$.

(iii) Usando a notação da definição anterior, C é o conjunto dos pontos de $[0, 1]$ em cuja representação normalizada não aparece o dígito 1. SUGESTÃO: Seja $(T_n)_{n \geqslant 0}$ definida indutivamente por $T_0 = [0, 1]$ e, para $n \geqslant 1$, T_n o conjunto obtido na n-ésima etapa da construção do conjunto de Cantor, i.e. T_n é a reunião dos intervalos fechados que sobram após a remoção dos terços médios dos intervalos de T_{n-1}. Mostre que, $\forall n \in \mathbb{N}$, T_n é o conjunto dos pontos cuja representação normalizada na base 3 é da forma $0.x_1 \cdots x_n \cdots$ com $x_i \in \{0, 2\}$ para $1 \leqslant i \leqslant n$.

(iv) Pelo item anterior, fica bem definida a aplicação $f : C \to [0, 1]$ tal que, se a representação normalizada de x na base 3 for $0.x_1x_2\cdots$, então $f(x) \in [0, 1]$ tem representação na base 2 dada por $0.y_1y_2\cdots$, onde $(\forall n \in \mathbb{N})\, y_n = x_n/2$. Então f é sobrejetiva; portanto, $\operatorname{card}(C) = \mathfrak{c}$. Além disso, f é crescente e, dados $x, y \in [0, 1]$ com $x < y$, então $f(x) = f(y)$ **see** (x, y) é um dos intervalos que se removeu em alguma etapa da construção do conjunto de Cantor.

(v) Com a notação do item anterior, defina $F : [0, 1] \to [0, 1]$ por $F|_C = f$ e, em cada intervalo (x, y) que se removeu em alguma etapa da construção do conjunto de Cantor, F é constante e igual a $f(x) = f(y)$. Então F é crescente e contínua. F chama-se *função de Cantor-Lebesgue.*

3-) Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{L}$, respectivamente, as σ-álgebras de Borel e de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Mostre que $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = \mathfrak{c}$ e $\operatorname{card}(\mathcal{L}) = 2^{\mathfrak{c}}$; conclua que $\mathcal{B} \subsetneqq \mathcal{L}$. SUGESTÃO: Use (e prove!) a proposição 1.23 do Folland.