MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 4`

Exercícios do Folland

1 Seção 1.4

Definição 1. Uma *pré-medida* é uma medida numa álgebra.

17-) Sejam μ^* uma medida exterior em X e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos μ^*-mensuráveis disjuntos. Então, para todo $E \subset X$, $\mu^*\big(E \cap (\cup_1^\infty A_n)\big) = \sum_1^\infty \mu^*(E \cap A_n)$.

18-) Sejam $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra, $\mathcal{A}_\sigma$ a coleção de todas as uniões enumeráveis de elementos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ a coleção de todas as intersecções enumeráveis de elementos de $\mathcal{A}_\sigma$. Sejam μ_0 uma pré-medida em $\mathcal{A}$ e μ^* a medida exterior por ela induzida.

(a) $\forall E \subset X, \forall \epsilon > 0$, existe $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E \subset A$ e $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(E) + \epsilon$.
(b) Se $\mu^*(E) < \infty$, então E é μ^*-mensurável se, e somente se, existe $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $E \subset B$ e $\mu^*(B \setminus E) = 0$.
(c) Se μ_0 é σ-finita, a restrição $\mu^*(E) < \infty$ no item anterior é supérflua.

19-) Seja μ^* uma medida exterior em X induzida por uma pré-medida finita μ_0. Dado $E \subset X$, defina a *medida interior* de E por $\mu_*(E) \doteq \mu_0(X) - \mu^*(E^c)$. Então E é μ^*-mensurável *see* $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

20-) Sejam μ^* uma medida exterior em X, $\mathcal{M}^*$ a σ-álgebra dos conjuntos μ^*-mensuráveis, $\nu \doteq \mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ e ν^* a medida exterior induzida por ν.

(a) Se $E \subset X$, então $\mu^*(E) \leqslant \nu^*(E)$, valendo a igualdade *see* existir $A \in \mathcal{M}^*$ tal que $E \subset A$ e $\mu^*(E) = \mu^*(A)$.
(b) Se μ^* for induzida por uma pré-medida, então $\mu^* = \nu^*$.
(c) Se $X = \{0, 1\}$, existe uma medida exterior μ^* em X tal que $\mu^* \neq \nu^*$.

21-) [opcional] Sejam μ^* uma medida exterior induzida por uma pré-medida e μ a restrição de μ^* aos conjuntos μ^*-mensuráveis. Então μ é saturada.

22-) [opcional] Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, μ^* a medida exterior induzida por μ, $\mathcal{M}^*$ a σ-álgebra dos conjuntos μ^*-mensuráveis e $\overline{\mu}$ a restrição de μ^* a $\mathcal{M}^*$.

(a) Se μ é σ-finita, $\overline{\mu}$ é o completamento de μ.
(b) Em geral, $\overline{\mu}$ é a saturação do completamento de μ.

23-) Seja $\mathcal{A}$ a coleção de todas as uniões finitas de conjuntos da forma $(a, b] \cap \mathbb{Q}$, com $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$.

(a) $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathbb{Q}$.
(b) A σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ é $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
(c) Defina μ_0 em $\mathcal{A}$ por $\mu_0(\emptyset) = 0$ e $\mu_0(A) = \infty$ se $A \neq \emptyset$. Então μ_0 é uma pré-medida em $\mathcal{A}$ e existe mais de uma medida em $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ que estende μ_0.

24-) Sejam μ uma medida finita em $(X, \mathcal{M})$ e μ^* a medida exterior induzida por μ. Suponha que $E \subset X$ (não necessariamente mensurável) satisfaça $\mu^*(E) = \mu^*(X)$.

(a) Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \cap E = B \cap E$, então $\mu(A) = \mu(B)$.
(b) Seja $\mathcal{M}_E \doteq \{A \cap E | A \in \mathcal{M}\}$; defina $\nu : \mathcal{M}_E \to [0, \infty]$ por $\nu(A \cap E) \doteq \mu(A)$ (o que é uma boa definição, pelo item anterior). Então $\mathcal{M}_E$ é uma σ-álgebra em E e ν é uma medida em $\mathcal{M}_E$.