**MAT 5798 – Medida e Integração**
**IME – 2017**

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 3`

**Questão 1** (teorema 1.9 - completamento de um espaço de medida)**-)** Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $\mathcal{N} \doteq \{E \in \mathcal{M} : \mu(E) = 0\}$. Defina $\overline{\mathcal{M}} \doteq \{E \cup F : E \in \mathcal{M}$ e $F \subset N, N \in \mathcal{N}\}$. Então $\overline{\mathcal{M}}$ é uma $\sigma$-álgebra em $X$ e existe uma única extensão $\overline{\mu}$ de $\mu$ a uma medida em $\overline{\mathcal{M}}$, a qual é completa.

# Exercícios do Folland

## Seção 1.3

8-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$. Então $\mu(\liminf E_n) \leqslant \liminf \mu E_n$. Além disso, se $\mu(\cup_1^\infty E_n) < \infty$, então $\mu(\limsup E_n) \geqslant \limsup \mu E_n$.

9-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E, F \in \mathcal{M}$. Então $\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \mu(F)$.

11-) Uma *medida finitamente aditiva* $\mu$ em $(X, \mathcal{M})$ é uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e, para toda $(E_n)_1^k \prec \mathcal{M}$, $\mu(\cup_1^k E_n) = \sum_1^k \mu(E_n)$. Verifique que uma medida finitamente aditiva $\mu$ em $(X, \mathcal{M})$ é uma medida ***see*** $\mu$ é contínua inferiormente. Se $\mu(X) < \infty$, esta condição também é equivalente a ser $\mu$ contínua superiormente.

12-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finito.

(a) Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $\mu(E\Delta F) = 0$, então $\mu(E) = \mu(F)$.
(b) Defina $E \sim F$ se $\mu(E\Delta F) = 0$. Então $\mu$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{M}$.
(c) Defina $\rho(E, F) \doteq \mu(E\Delta F)$. Então $\rho(E, G) \leqslant \rho(E, F) + \rho(F, G)$, de modo que $\rho$ define uma métrica no quociente $\mathcal{M}/\sim$.

14-) Sejam $\mu$ uma medida semi-finita e $E$ mensurável tal que $\mu(E) = \infty$. Então, para todo $C > 0$, existe $F \subset E$ mensurável tal que $C < \mu(F) < \infty$.

16-) [opcional] Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Um conjunto $E \subset X$ diz-se *localmente mensurável* se $E \cap A \in \mathcal{M}$ para todo $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) < \infty$. Seja $\mathcal{M}_{loc}$ o coleção de todos os subconjuntos localmente mensuráveis de $X$. Então $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{loc}$. Se $\mathcal{M}_{loc} = \mathcal{M}$, diz-se que $\mu$ é *saturada*.

(a) Se $\mu$ for $\sigma$-finita, então $\mu$ é saturada.
(b) $\mathcal{M}_{loc}$ é uma $\sigma$-álgebra.
(c) Defina $\nu$ em $\mathcal{M}_{loc}$ por $\nu(E) \doteq \mu(E)$ se $E \in \mathcal{M}$ e $\nu(E) \doteq \infty$ caso contrário. Então $\nu$ é uma medida saturada em $\mathcal{M}_{loc}$, chamada *saturação* de $\mu$.
(d) Se $\mu$ for completa, $\nu$ também o é.
(e) Suponha que $\mu$ seja semi-finita. Dado $E \in \mathcal{M}_{loc}$, defina $\nu_0(E) \doteq \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{M}$ e $A \subset E\}$. Então $\nu_1$ é uma medida saturada em $\mathcal{M}_{loc}$ que estende $\mu$.
(f) Sejam $X_1, X_2$ conjuntos disjuntos enumeráveis e $X = X_1 \cup X_2$. Sejam $\mathcal{M}$ a $\sigma$-álgebra dos conjuntos enumeráveis ou co-enumeráveis em $X$ e $\mu_0$ a medida de contagem em $\mathcal{P}(X_1)$. Defina $\mu$ em $\mathcal{M}$ por $\mu(E) \doteq \mu_0(E \cap X_1)$. Então $\mu$ é uma medida em $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{loc} = \mathcal{P}(X)$ e, com a notação dos ítens anteriores, $\nu \neq \nu_0$.