MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 2`

Questão 1-) Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$. Uma função f em X é mensurável *see* $(\forall n \in \mathbb{N})$ a restrição de f a $(A_n, \mathcal{M}|_{A_n})$ for mensurável.

Questão 2-) a) Defina $\mathrm{sgn} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $\mathrm{sgn}(z) = z/|z|$ se $z \neq 0$ e $\mathrm{sgn}(0) = 0$, de modo que $(\forall z \in \mathbb{C})\, z = \mathrm{sgn}(z) \cdot |z|$. Então sgn é mensurável. SUGESTÃO: Use a questão 1 com $A_1 = \{0\}$ e $A_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{C}$. Então $f = \mathrm{sgn}(f) \cdot |f|$ (esta é a *decomposição polar* de f); f é mensurável *see* $\mathrm{sgn}(f)$ e $|f|$ o forem.

Questão 3 (coproduto de espaços mensuráveis)**-)** Sejam $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in A}$ família de espaços mensuráveis e $X \doteq \dot{\bigcup}_{\alpha\in A} X_\alpha$. Defina $\mathcal{M} \subset 2^X$ por $\mathcal{M} \doteq \{V \subset X : \forall\alpha \in A, V \cap X_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\}$. Mostre que:

(i) $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra em X para a qual todas as inclusões $i_\alpha : X_\alpha \to X$, $\alpha \in A$, são mensuráveis, e é a maior σ-álgebra com esta propriedade (i.e. contém qualquer outra σ-álgebra com esta propriedade).

(ii) Dado $(Y, \mathcal{N})$ espaço mensurável, uma aplicação $\phi : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ é mensurável *see* $(\forall\alpha \in A)\phi \circ i_\alpha$ for mensurável.

Exercícios do Folland

Seção 1.3

7-) Se $\mu_1, \ldots, \mu_n$ são medidas em $(X, \mathcal{M})$ e $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty)$, então $\sum_{i=1}^n a_i\mu_i$ é uma medida em $(X, \mathcal{M})$.

10-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E \in \mathcal{M}$. Defina $(\forall A \in \mathcal{M})\mu\lrcorner E(A) \doteq \mu(E \cap A)$. Então $\mu\lrcorner E$ é uma medida.

13-) Toda medida σ-finita é semi-finita.

Seção 2.1

2-) Sejam $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis.

(a) fg é mensurável (onde $0 \cdot (\pm\infty) \doteq 0$).

(b) Fixe $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e defina $h(x) = a$ se $f(x) = -g(x) = \pm\infty$ e $h(x) = f(x) + g(x)$ caso contrário. Então h é mensurável.

SUGESTÃO: Mostre que $+, \cdot : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ definidas acima são ambas mensuráveis e reaplique o argumento usado com $\mathbb{C}$ no lugar de $\overline{\mathbb{R}}$. Por exemplo, para verificar que $+$ é mensurável, use a questão 1 com $A_1 \doteq \{(\infty, -\infty), (-\infty, \infty)\}$ e $A_2 \doteq \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus A_1$.

4-) Se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $(\forall r \in \mathbb{Q}) f^{-1}((r, \infty]) \in \mathcal{M}$, então f é mensurável.

8-) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monótona, então f é Borel-mensurável.