MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 18`

Questão 1-) Demonstre as proposições 7.7 a 7.10.

Questão 2-) Sejam X espaço LCH e μ medida de Radon em $(X, \mathcal{B}_X)$.

a) Seja $f : X \to \mathbb{C}$ uma função boreliana que se anule no complementar de um mensurável de medida finita. Então existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathsf{C_c}(X)$ tal que $f_n \to f$ quase uniformemente (em particular, $f_n \to f$ quase sempre). Além disso, se f for limitada, podemos tomar a referida sequência de modo que $(\forall n \in \mathbb{N})\|f_n\|_u \le \|f\|_u$.

b) Suponha μ σ-finita. Seja $f : X \to \mathbb{C}$ uma função boreliana. Então existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathsf{C_c}(X)$ tal que $f_n \to f$ quase sempre. Além disso, se f for limitada, podemos tomar a referida sequência de modo que $(\forall n \in \mathbb{N})\|f_n\|_u \le \|f\|_u$.

Sugestão: Use o teorema de Lusin em ambos os casos.

1 Seção 7.1

1-) Sejam X LCH, $Y \subset X$ fechado (portanto, Y é LCH com a topologia relativa) e μ uma medida de Radon em Y. Mostre que $I(f) \doteq \int (f|_Y)\, \mathrm{d}\mu$ define um funcional linear positivo em $\mathrm{C}_c(X)$ e que a medida de Radon induzida por este funcional coincide com o *push forward* de μ pela inclusão.

2-) Sejam X LCH e μ medida de Radon em X.

(i) Seja N a união de todos os abertos $\mathcal{U} \subset X$ tais que $\mu(\mathcal{U}) = 0$. Então N é aberto e $\mu(N) = 0$. O complemento de N chama-se *suporte* de μ (notação: $\operatorname{supp}\mu$).

(ii) $x \in \operatorname{supp}\mu$ ***see*** para toda $f \in \mathrm{C}_c(X, [0, 1])$ tal que $f(x) > 0$, tem-se $\int f\, \mathrm{d}\mu > 0$.

3-) [opcional] Seja X a compactificação de Alexandrov de um espaço topológico discreto. Se μ é uma medida de Radon em X, então $\operatorname{supp}\mu$ é enumerável. Sugestão: Use a questão anterior.

2 Seção 7.2

7-) Seja μ uma medida de Radon σ-finita num espaço LCH X. Para todo $A \in \mathcal{B}_X$, $\mu \llcorner A$ (i.e. a medida dada por $E \mapsto \mu(E \cap A)$) é uma medida de Radon.

8-) Sejam μ uma medida de Radon σ-finita num espaço LCH X e $\phi \in \mathsf{L}^1(\mu)$, $\phi \geqslant 0$. Então $\nu \doteq \phi\, \mathrm{d}\mu$ é uma medida de Radon.

8'-) [opcional] Mesmo enunciado da questão 8, sem a hipótese de que μ seja σ-finita.

9-) [opcional] Sejam μ uma medida de Radon num espaço LCH X, $\phi \in \mathrm{C}\big(X, (0, \infty)\big)$ e $\nu \doteq \phi\, \mathrm{d}\mu$. Seja ν' a medida de Radon associada, pelo teorema de representação de Riesz, ao funcional linear positivo em $\mathrm{C}_c(X)$ dado por $I = \int \cdot\, \mathrm{d}\nu$.

(a) Se $\mathcal{U} \subset X$ aberto, $\nu(\mathcal{U}) = \nu'(\mathcal{U})$. Sugestão: Aplique o corolário 7.13 a $\phi\chi_{\mathcal{U}}$.

(b) ν é exteriormente regular. Sugestão: Os abertos $\{x : 2^k < x < 2^{k+2}\}$, $k \in \mathbb{Z}$, cobrem X.

(c) $\nu = \nu'$ (portanto, ν é medida de Radon).

10-) [opcional] Sejam μ uma medida de Radon num espaço LCH X e $f \in \mathsf{L}^1(\mu)$ a valores reais. Para todo $\epsilon > 0$, existem g SCI e h SCS tais que $h \leqslant f \leqslant g$ e $\int (g - h)\, \mathrm{d}\mu < \epsilon$.

11-) [opcional] Seja μ uma medida de Radon num espaço LCH X tal que, para todo $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$. Para todo $A \in \mathcal{B}_X$ tal que $0 < \mu(A) < \infty$ e para todo $0 < \alpha < \mu(A)$, existe $B \in \mathcal{B}_X$ tal que $B \subset A$ e $\mu(B) = \alpha$.