MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 16`

Questão 1-) Se $0 < p < q < r \leq \infty$, $\mathsf{L}^\mathsf{q} \subset \mathsf{L}^\mathsf{p} + \mathsf{L}^\mathsf{r}$.
SUGESTÃO: Dada $f \in \mathsf{L}^\mathsf{q}$, tome $A \doteq \{x \in X : |f(x)| \leq 1\}$ e escreva $f = f\chi_A + f\chi_{A^c}$.

Questão 2-) Se $0 < p < q < r \leq \infty$, $\mathsf{L}^\mathsf{p} \cap \mathsf{L}^\mathsf{r} \subset \mathsf{L}^\mathsf{q}$. Além disso, tomando $\lambda \in (0,1)$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$, tem-se, para toda $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável, $\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$.
SUGESTÃO: Basta verificar a desigualdade. Se $r = \infty$, o argumento é direto. Se $0 < p < q < r < \infty$, escreva $\frac{1}{q} = \frac{1}{p/\lambda} + \frac{1}{r/(1-\lambda)}$ e aplique a desigualdade de Hölder generalizada para o produto $|f| = |f|^\lambda |f|^{1-\lambda}$.

Questão 3-) Demonstre as proposições 6.11 e 6.12.

1 Seção 6.1

1-) Quando vale a igualdade na desigualdade de Minkowsky? (a resposta é diferente se $p = 1$ e $1 < p < \infty$).

2-) Demonstre o teorema 6.8:

(a) Se f e g forem funções mensuráveis em X, então $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$. Se $f \in \mathsf{L}^1$ e $g \in \mathsf{L}^\infty$, então $\|fg\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ `see` $|g(x)| = \|g\|_\infty$ q.s. no conjunto onde $f(x) \neq 0$.
(b) $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em L^∞.
(c) $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ `see` $\exists E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E^c) = 0$ e $f_n \to f$ uniformemente em E.
(d) L^∞ é um espaço de Banach.
(e) As funções simples são densas em L^∞.

3-) Se $1 \leqslant p < r \leqslant \infty$, $\mathsf{L}^\mathsf{p} \cap \mathsf{L}^\mathsf{r}$ é um espaço de Banach com norma $\|f\| \doteq \|f\|_p + \|f\|_r$. Além disso, se $p < q < r$, a inclusão $\mathsf{L}^\mathsf{p} \cap \mathsf{L}^\mathsf{r} \to \mathsf{L}^\mathsf{q}$ é contínua.

7-) Se $f \in \mathsf{L}^\mathsf{p} \cap \mathsf{L}^\infty$ para algum $p < \infty$, de modo que $f \in \mathsf{L}^\mathsf{q}$ para todo $q > p$, então $\|f\|_\infty = \lim_{q\to\infty}\|f\|_q$.

8-) Suponha $\mu(X) = 1$ e $f \in \mathsf{L}^\mathsf{p}$ para algum $p > 0$, de modo que $f \in \mathsf{L}^\mathsf{q}$ para $0 < q < p$.

(a) $\log\|f\|_q \geqslant \int \log|f|$. SUGESTÃO: Use a desigualdade de Jensen com $F = \exp$.
(b) $(\int |f|^q - 1)/q \geqslant \log\|f\|_q$, e $\lim_{q\to 0}(\int |f|^q - 1)/q = \int \log|f|$.
(c) $\lim_{q\to 0}\|f\|_q = \exp(\int \log|f|)$.

9-) Seja $1 \leqslant p < \infty$. Se $\|f_n - f\|_p \to 0$, então $f_n \to f$ em medida, portanto alguma subsequência de $(f_n)_n$ converge para f q.s. Por outro lado, se $f_n \to f$ em medida e $(\forall n \in \mathbb{N})\, |f_n| \leqslant g \in \mathsf{L}^\mathsf{p}$, então $\|f_n - f\|_p \to 0$.

10-) Seja $1 \leqslant p < \infty$. Se $f_n, f \in \mathsf{L}^\mathsf{p}$ e $f_n \to f$ q.s., então $\|f_n - f\|_p \to 0$ `see` $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

11-) Seja f uma função mensurável em X. Defina a *imagem essencial* R_f de f por $R_f \doteq \{z \in \mathbb{C} | \forall \epsilon > 0, \mu\{x \in X | |f(x) - z| < \epsilon\} > 0\}$.

(a) R_f é fechado.
(b) Se $f \in \mathsf{L}^\infty$, R_f é compacto e $\|f\|_\infty = \max\{|z| | z \in R_f\}$.

11 - complemento-) Com a notação da questão anterior, mostre que:

(a) $\mathsf{L}^\infty(X)$ é uma álgebra de Banach com unidade (a multiplicação é induzida pelo produto de funções induzido pelo produto de $\mathbb{C}$ e a unidade é a classe de equivalência da função constante e igual a 1).
(b) $f \in \mathsf{L}^\infty$ é inversível `see` $0 \notin R_f$.

13-) $\mathsf{L}^\mathsf{p}(\mathbb{R}^n, m)$ é separável para $1 \leqslant p < \infty$. Todavia, $\mathsf{L}^\infty(\mathbb{R}^n, m)$ não é separável (mostre que existe um conjunto não-enumerável $\mathcal{F} \subset \mathsf{L}^\infty$ tal que $(\forall f \neq g \in \mathcal{F})\, \|f - g\|_\infty \geqslant 1$).

14-) Se $g \in \mathsf{L}^\infty$, o operador $T : \mathsf{L}^\mathsf{p} \to \mathsf{L}^\mathsf{p}$ definido por $f \mapsto fg$ é limitado em L^p para $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Além disso, $\|T\| \leqslant \|g\|_\infty$, valendo a igualdade se μ for semi-finita.