MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 15`

Questão 1 (opcional)**-)** Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Mostre que X é Lebesgue-mensurável.
SUGESTÃO: Mostre que a fronteira ∂X de X tem medida de Lebesgue zero. Para tal, verifique que o interior de $\overline{X}$ coincide com o interior de X, de modo que $\partial\overline{X} = \partial X$. Suponha que $\partial\overline{X} = \partial X$ tenha medida positiva. Note que $\overline{X}$ é um fechado convexo; aplique o teorema de diferenciação de Lebesgue para a função característica de $\overline{X}$ para chegar a uma contradição.

Para verificar que o interior de $\overline{X}$ coincide com o interior de X: é trivial se X estiver contido num subespaço afim próprio de $\mathbb{R}^n$. Se isso não ocorrer, verifique que o interior de X é não vazio (e convexo, mas isso não importa) e aplique o lema abaixo:

LEMA 1. Seja X um convexo de um espaço normado e p um ponto interior de X. Então, para todo q no fecho de X, o segmento aberto $]p, q[$ está contido no interior de X.

1 Seção 3.4

23-) Uma variante útil da função maximal de Hardy-Littlewood é:

$$H^* f(x) \doteq \sup\{\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| \, \mathrm{d}y | B \text{ é uma bola e } x \in B\}.$$

Mostre que $Hf \leqslant H^* f \leqslant 2^n Hf$.

24-) Se $f \in \mathsf{L}^1_{\mathsf{loc}}$ e f é contínua em x, então x pertence ao conjunto de Lebesgue de f.

25-) Seja $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. A densidade $D_E(x)$ de E em x é definida por:

$$D_E(x) \doteq \lim_{r \to 0} \frac{m\big(E \cap B_r(x)\big)}{m\big(B_r(x)\big)},$$

sempre que o limite existir.

(a) Mostre que $D_E(x) = 1$ q.s. em E e $D_E(x) = 0$ q.s. em E^c.
(b) Encontre exemplos de E e x tais que $D_E(x) \in (0, 1)$ ou $D_E(x)$ não existe.

2 Seção 3.5

28-) Sejam $F \in \mathrm{NBV}$ e $G(x) \doteq |\mu_F|(-\infty, x]$. Mostre que $G = T_F$ (donde $|\mu_F| = \mu_{T_F}$). Como sugestão, use o seguinte roteiro:

(a) $T_F \leqslant G$.
(b) $|\mu_F(E)| \leqslant \mu_{T_F}(E)$ se E for um intervalo e, portanto, se E for um boreliano.
(c) $|\mu_F| \leqslant \mu_{T_F}$, portanto $G \leqslant T_F$.

29-) Se $F \in \mathrm{NBV}$ assume valores reais, então $\mu_F^+ = \mu_P$ e $\mu_F^- = \mu_N$, onde P e N são as variações positiva e negativa de F.

30-) Construa uma função crescente $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo conjunto de descontinuidades seja $\mathbb{Q}$.

31-) Sejam $F(x) \doteq x^2 \sin(x^{-1})$ e $G(x) \doteq x^2 \sin(x^{-2})$ para $x \neq 0$, e $F(0) = 0 = G(0)$.

(a) F e G são diferenciáveis em $\mathbb{R}$.
(b) $F \in \mathrm{BV}([-1, 1])$, mas $G \notin \mathrm{BV}([-1, 1])$.

32-) Se $F_1, F_2, \ldots, F \in \mathrm{NBV}$ e $F_n \to F$ pontualmente, então $T_F \leqslant \liminf T_{F_n}$.

33-) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for crescente, então $f(b) - f(a) \geqslant \int_a^b f'(t) \, \mathrm{d}t$.

34-) Sejam $F, G \in \mathrm{NBV}$ e $-\infty < a < b < \infty$.

(a)
$$\int_{[a,b]} \frac{F(x)+F(x-)}{2}\,\mathrm{d}G(x) + \int_{[a,b]} \frac{G(x)+G(x-)}{2}\,\mathrm{d}F(x) = F(b)G(b) - F(a-)G(a-).$$

(b) Se não houver pontos em $[a,b]$ onde F e G sejam ambas descontínuas, então:
$$\int_{[a,b]} F\,\mathrm{d}G + \int_{[a,b]} G\,\mathrm{d}F = F(b)G(b) - F(a-)G(a-).$$

35-) Se F e G são absolutamente contínuas em $[a,b]$, então FG também o é e:
$$\int_a^b (FG' + F'G)(x)\,\mathrm{d}x = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

36-) Seja $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua crescente, $G(a) = c$ e $G(b) = d$.

(a) Se $E \subset [c,d]$ é um boreliano, $m(E) = \mu_G(G^{-1}(E))$.
(b) Se f é Borel-mensurável e integrável em $[c,d]$, então $\int_c^d f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f\big(G(x)\big)\,\mathrm{d}G(x)$. Em particular, $\int_c^d f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f\big(G(x)\big)G'(x)\,\mathrm{d}x$ se G for absolutamente contínua.
(c) O item anterior não vale, em geral, se G for apenas contínua pela direita.

37-) Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. São equivalentes:

(i) Existe $M \geqslant 0$ tal que $(\forall x, y \in \mathbb{R})\, |F(y) - F(x)| \leqslant M|F(y) - F(x)|$ (i.e. F é Lipschitziana com constante de Lipschitz M).
(ii) F é absolutamente contínua e $|F'| \leqslant M$ q.s.

38-) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, considere o gráfico de f como um subconjunto de $\mathbb{C}$ (i.e. identifique $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$). O comprimento L do referido gráfico é, por definição, o supremo dos comprimentos de todas as poligonais inscritas no mesmo.

(a) Seja $F(t) = t + if(t)$; então L é a variação total de F em $[a,b]$.
(b) Se f for absolutamente contínua, $L = \int_a^b [1 + f'(t)^2]^{1/2}\,\mathrm{d}t$.

39-) Seja $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções positivas crescentes em $[a,b]$ tais que $F(x) \doteq \sum_1^\infty F_j(x) < \infty$ para todo $x \in [a,b]$. Então $F'(x) = \sum_1^\infty F_j'(x)$ q.s. em $[a,b]$. Sugestão: Pode-se assumir $F_j \in \mathrm{NBV}$; considere as medidas μ_{F_j}.

42-) Uma função $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$ chama-se *convexa* se, $\forall s, t \in (a,b), \forall \lambda \in (0,1)$,
$$F(\lambda s + (1-\lambda)t) \leqslant \lambda F(s) + (1-\lambda)F(t).$$

Geometricamente, isto significa que, $\forall s, t \in (a,b)$, o gráfico de F fica abaixo do segmento que passa por $(s, F(s))$ e $(t, F(t))$.

(a) F é convexa *see* $\forall s, t, s', t' \in (a,b)$ tais que $s \leqslant s' < t'$ e $s < t \leqslant t'$,
$$\frac{F(t) - F(s)}{t - s} \leqslant \frac{F(t') - F(s')}{t' - s'}.$$

(b) F é convexa *see* F é absolutamente contínua em todo subintervalo compacto de (a,b) e F' for crescente (no conjunto onde estiver definida).
(c) Se F for convexa e $t_0 \in (a,b)$, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $(\forall t \in (a,b))\, F(t) - F(t_0) \geqslant \beta(t - t_0)$.
(d) (desigualdade de Jensen) Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ for um espaço de medida com $\mu(X) = 1$ e $g : X \to (a,b)$ estiver em $\mathsf{L}^1(\mu)$, e se F for convexa em (a,b), então:
$$F\Big(\int g\,\mathrm{d}\mu\Big) \leqslant \int F \circ g\,\mathrm{d}\mu.$$

Sugestão: Ponha $t_0 \doteq \int g\,\mathrm{d}\mu$ e $t \doteq g(x)$ no item anterior e integre.