MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 14`

Seções 3.2 e 3.3

8-) $\nu \ll \mu$ **see** $|\nu| \ll \mu$ **see** $\nu^+ \ll \mu$ e $\nu^- \ll \mu$.

9-) Seja $(\nu_j)_j$ uma sequência de medidas positivas.

(a) Se $(\forall j)\, \nu_j \perp \mu$, então $\sum_1^\infty \nu_j \perp \mu$.
(b) Se $(\forall j)\, \nu_j \ll \mu$, então $\sum_1^\infty \nu_j \ll \mu$.

11-) Seja μ uma medida positiva. Uma coleção de funções $(f_\alpha)_{\alpha\in A} \prec \mathsf{L}^1(\mu)$ diz-se *uniformemente integrável* se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\int_E f \,\mathrm{d}\mu| < \epsilon$ para todo $\alpha \in A$ e para todo $E \in \mathcal{M}$ com $\mu(E) < \delta$.

(a) Todo subconjunto finito de $\mathsf{L}^1(\mu)$ é uniformemente integrável.
(b) Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathsf{L}^1(\mu)$ e $f_n \to f$ em $\mathsf{L}^1(\mu)$, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente integrável.

12-) Para $j = 1, 2$, sejam ν_j, μ_j medidas positivas σ-finitas em $(X_j, \mathcal{M}_j)$ tais que $\nu_j \ll \mu_j$. Então $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ e:

$$\frac{\mathrm{d}(\nu_1 \times \nu_2)}{\mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}(x_1)\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}(x_2).$$

13-) Sejam $X = [0, 1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, m a medida de Lebesgue e μ a medida de contagem em $\mathcal{M}$.

(a) $m \ll \mu$, mas não existe f μ-quase integrável tal que $\mathrm{d}m = f\,\mathrm{d}\mu$.
(b) μ não admite decomposição de Lebesgue com respeito a m.

14-) Sejam ν uma medida com sinal arbitrária (não necessariamente σ-finita) e μ uma medida positiva σ-finita em $(X, \mathcal{M})$ tais que $\nu \ll \mu$. Então existe $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-quase integrável tal que $\mathrm{d}\nu = f\,\mathrm{d}\mu$. Como sugestão, use o seguinte roteiro:

(a) É suficiente demonstrar o caso em que μ é finita e ν é positiva.
(b) Com tais hipóteses, existe $E \in \mathcal{M}$ σ-finito para ν tal que $\mu(E) \geqslant \mu(F)$ para todo $F \in \mathcal{M}$ σ-finito para ν.
(c) O teorema de Radon-Nikodym se aplica em E. Se $F \in \mathcal{M}$ e $F \cap E = \emptyset$, então, ou $\nu(F) = \mu(F) = 0$ ou $\mu(F) > 0$ e $|\nu(F)| = \infty$.

16-) Sejam μ, ν medidas σ-finitas em $(X, \mathcal{M})$ tais que $\nu \ll \mu$, $\lambda \doteq \mu + \nu$ e $f \doteq \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}$. Então $0 \leqslant f < 1$ μ-q.s. e $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = f/(1 - f)$.

17-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finito, $\mathcal{N}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{M}$ e $\nu \doteq \mu|_{\mathcal{N}}$. Se $f \in \mathsf{L}^1(\mu)$, existe $g \in \mathsf{L}^1(\nu)$ (portanto, g é $\mathcal{N}$-mensurável) tal que $(\forall E \in \mathcal{N})\ \int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E g\,\mathrm{d}\nu$. Se $g' \in \mathsf{L}^1(\nu)$ for outra função com a mesma propriedade, então $g = g'$ ν-q.s.; em *teoria da Probabilidade*, g chama-se *expectativa condicional* de f em $\mathcal{N}$.

18-) Sejam ν uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$ e $f \in \mathsf{L}^1(\nu)$. Então $\mathsf{L}^1(\nu) = \mathsf{L}^1(|\nu|)$ e $|\int f\,\mathrm{d}\nu| \leqslant \int |f|\,\mathrm{d}|\nu|$.

19-) Se ν, μ são medidas complexas e λ é uma medida positiva, então $\nu \perp \mu$ **see** $|\nu| \perp |\mu|$, e $\nu \ll \lambda$ **see** $|\nu| \ll \lambda$.

20-) Se ν é uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$ e $\nu(X) = |\nu|(X)$, então $\nu = |\nu|$.

21-) Sejam ν uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$ e $E \in \mathcal{M}$. Defina:

$$\mu_1(E) \doteq \sup\{\sum_1^n |\nu(E_j)| | n \in \mathbb{N}, (E_j)_1^n \prec \mathcal{M}, E = \cup_1^n E_j\}$$

$$\mu_2(E) \doteq \sup\{\sum_1^\infty |\nu(E_j)| | (E_j)_1^\infty \prec \mathcal{M}, E = \cup_1^\infty E_j\}$$

$$\mu_3(E) \doteq \sup\{|\int_E f\,\mathrm{d}\nu| | f \in \mathsf{L}^1(\nu), |f| \leqslant 1\}.$$

Então $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = |\nu|$. Sugestão: Mostre que $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_3$. Para verificar que $\mu_3 = |\nu|$, tome $f \doteq \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}|\nu|$. Para verificar que $\mu_3 \leqslant \mu_1$, aproxime f por funções simples.