MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 13`

1 Seção 3.1

1-) Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$. Se $(E_n)_n \prec \mathcal{M}$ é uma sequência crescente, então $\nu(\cup_1^\infty E_n) = \lim \nu(E_n)$. Se $(E_n)_n \prec \mathcal{M}$ é uma sequência decrescente e $\nu(E_1) < \infty$, então $\nu(\cap_1^\infty E_n) = \lim \nu(E_n)$.

2-) Se ν é uma medida com sinal, $E \in \mathcal{M}$ é ν-nulo ***see*** $|\nu|(E) = 0$. Além disso, se μ, ν são medidas com sinal, tem-se: $\nu \perp \mu$ ***see*** $|\nu| \perp \mu$ ***see*** $\nu^+ \perp \mu$ e $\nu^- \perp \mu$.

3-) Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$. Tem-se:

(a) $\mathsf{L}^1(\nu) = \mathsf{L}^1(|\nu|)$.
(b) Se $f \in \mathsf{L}^1(\nu)$, então $|\int f \, \mathrm{d}\nu| \leqslant \int |f| \, \mathrm{d}|\nu|$.
(c) Se $|\nu|$ for semi-finita, então, para todo $E \in \mathcal{M}$, $|\nu|(E) = \sup\{|\int f \, \mathrm{d}\nu| \,|\, f \in \mathsf{L}^1(\nu) \text{ e } |f| \leqslant 1\}$.

4-) Se ν é uma medida com sinal e λ, μ são medidas positivas tais que $\nu = \lambda - \mu$, então $\lambda \geqslant \nu^+$ e $\mu \geqslant \nu^-$.

5-) Sejam ν_1 e ν_2 medidas com sinal. Suponha que ambas omitam o valor $+\infty$ ou o valor $-\infty$. Então $|\nu_1 + \nu_2| \leqslant |\nu_1| + |\nu_2|$.

6-) Seja $\nu(E) \doteq \int_E f \, \mathrm{d}\mu$, onde μ é uma medida positiva e f é μ-quase integrável. Descreva as decomposições de Hahn de ν e as variações positiva, negativa e total de ν em termos de f e μ.

7-) Sejam ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$ e $E \in \mathcal{M}$.

(a) $\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) | F \in \mathcal{M}, F \subset E\}$ e $\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) | F \in \mathcal{M}, F \subset E\}$.
(b) $|\nu|(E) = \sup\{\sum_1^n |\nu(E_j)| \,|\, n \in \mathbb{N}, (E_j)_1^n \prec \mathcal{M} \text{ e } \cup_1^n E_j = E\}$.