MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 12`

Questão 1-) Seja $\phi : [0,\infty)\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(r,\theta) \doteq (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Mostre que, para toda $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mensurável, $f\circ\phi$ é Lebesgue-mensurável e, caso $f \geq 0$ ou $f \in \mathsf{L}^1$:

$$\int f\,\mathrm{d}m = \int_{[0,2\pi]}\int_{[0,\infty)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)r\,\mathrm{d}m(r)\,\mathrm{d}m(\theta).$$

Questão 2 (opcional – para quem já estudou EDO)**-)** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e X um campo de vetores de classe C^2 em Ω cujo divergente se anule identicamente. Mostre que o fluxo de X preserva a medida de Lebesgue, i.e. se $(\phi_t)_{\in\mathbb{R}}$ for o grupo local a 1 parâmetro induzido por X, então $(\phi_t)_*m = m$.

1 Seções 2.6 e 2.7

56-) Sejam f Lebesgue-integrável em $(0,a)$ e $g : (0,a) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) \doteq \int_x^a t^{-1}f(t)\,\mathrm{d}t$. Então g é integrável em $(0,a)$ e $\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

57-) Mostre que $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\,x^{-1}\sin x\,\mathrm{d}x = \arctan(s^{-1})$ para $s > 0$. (Sugestão: Integre $\mathrm{e}^{-sxy}\sin x$ com respeito a x e a y.)

59-) Seja $f(x) = x^{-1}\sin x$.

(a) Mostre que $\int_0^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x = \infty$.

(b) Mostre que $\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x = \pi/2$. Sugestão: Integre $\mathrm{e}^{-xy}\sin x$ com respeito a x e a y; em vista do item anterior, deve-se tomar algum cuidado ao tomar o limite para $b \to \infty$.

62-) A medida σ em S^{n-1} é invariante por rotações.

63-) (Integrais de polinômios em S^{n-1}). A técnica usada para se calcular $\sigma(\mathsf{S}^{n-1})$ pode ser aplicada para se calcular integrais de polinômios em S^{n-1}. Por exemplo, seja $f(x) = \prod_1^n x_j^{\alpha_j}$, $\alpha_j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Então $\int f\,\mathrm{d}\sigma = 0$ se algum dos α_j for ímpar; se todos os α_j forem pares, tem-se:

$$\int f\,\mathrm{d}\sigma = \frac{2\Gamma(\beta_1)\cdots\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\beta_1+\cdots+\beta_n)}\,,\ \text{onde } \beta_j \doteq \frac{\alpha_j+1}{2}\,.$$