MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 10`

1 Seção 2.5

46-) Sejam $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, μ a medida de Lebesgue e ν a medida de contagem. Seja $D \doteq \{(x,x) | x \in [0,1]\}$ a diagonal em $X \times Y$. Então $\int \chi_D \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\nu$, $\int \chi_D \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\mu$ e $\int \chi_D \,\mathrm{d}(\mu \times \nu)$ são todos distintos.

48-) Sejam $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu = \nu$ a medida de contagem. Defina $f(m,n) \doteq 1$ se $m = n$, $f(m,n) \doteq -1$ se $m = n+1$ e $f(m,n) = 0$ em qualquer outro caso. Então $\int |f| \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) = \infty$ e $\int f \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\nu \neq \int f \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\mu$ e são ambas finitas.

49-) Prove o teorema 2.39. Sugestão: Use o teorema 2.37, a proposição 2.12 e o seguinte lema:
Se $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ e $\mu \times \nu(E) = 0$, então $\nu(E_x) = 0 = \mu(E^y)$ para quase todo x e quase todo y.

50-) ["a integral de uma função é a área sob o seu gráfico"] Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida σ-finito e $f : X \to [0, \infty)$ mensurável. Defina $G_f \doteq \{(x,y) \in X \times [0,\infty) | y \leqslant f(x)\}$. Então G_f é $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mensurável e $\mu \times m(G_f) = \int f \,\mathrm{d}\mu$. O mesmo vale se na definição de G_f for usada a desigualdade estrita.

51-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida arbitrários (não necessariamente σ-finitos).

(a) Se $f : X \to \mathbb{C}$ é $\mathcal{M}$-mensurável, $g : Y \to \mathbb{C}$ é $\mathcal{N}$-mensurável e $h : X \times Y \to \mathbb{C}$ é dada por $h(x,y) = f(x)g(y)$, então h é $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-mensurável.

(b) Se $f \in \mathsf{L}^1(\mu)$ e $g \in \mathsf{L}^1(\nu)$, então $g \in \mathsf{L}^1(\mu \times \nu)$ e $\int h \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) = (\int f \,\mathrm{d}\mu)(\int g \,\mathrm{d}\nu)$.

52-) O teorema de Fubini-Tonelli é válido se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida arbitrário e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ é tal que Y é um conjunto enumerável, $\mathcal{N} = \mathcal{P}(Y)$ e ν a medida de contagem.