MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Lista 1`

DEFINIÇÃO 1. Sejam X um conjunto e $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathbb{P}(X)$. Diz-se que $\mathcal{S}$ é

- um *semi-anel* se for fechado por intersecção finita e se, $\forall\, A, B \in \mathcal{S}$, a diferença $A \setminus B$ é uma reunião finita disjunta de elementos de $\mathcal{S}$. Note que essa condição e o fato de ser $\mathcal{S} \neq \emptyset$ implicam $\emptyset \in \mathcal{S}$.
- uma *semi-álgebra* se for um semi-anel e se $X \in \mathcal{S}$.
- um *anel* se for fechado por união finita e diferença.
- uma *álgebra* se for um anel e se $X \in \mathcal{S}$.
- um σ-anel se for fechado por união enumerável e diferença.
- uma σ-álgebra se for um σ-anel e se $X \in \mathcal{S}$.
- uma *família elementar* se $\emptyset \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ for fechado por intersecção finita e, $\forall\, A \in \mathcal{S}$, A^c é uma reunião finita disjunta de elementos de $\mathcal{S}$.

Questão 1-) Sejam X um conjunto e $\emptyset \neq \mathcal{R} \subset \mathbb{P}(X)$. São equivalentes as seguintes afirmações:
$\mathcal{R}$ é fechada com respeito a:

a) união finita e diferença (i.e. $\mathcal{R}$ é um *anel*).

b) união finita e diferença própria.

c) diferença simétrica e intersecção finita. OBS.: $A \triangle B \doteq A \setminus B \cup B \setminus A = A \cup B \setminus A \cap B$ é a *diferença simétrica* entre A e B.

d) união finita disjunta, diferença própria e intersecção finita.

Questão 2-) Sejam X um conjunto e $\emptyset \neq \mathcal{R} \subset \mathbb{P}(X)$.

a) é uma semi-álgebra `see` for fechada por interseccções finitas, $X \in \mathcal{S}$ e, para todo $A \in \mathcal{S}$, o complementar A^c é uma reunião finita disjunta de elementos de $\mathcal{S}$.

b) $\mathcal{R}$ é uma álgebra (resp. uma σ-álgebra) `see` for fechado por complementação e união finita (resp. união enumerável) `see` for fechado por complementação e intersecção finita (resp. intersecção enumerável).

Questão 3-) $\mathcal{R} \subset \mathbb{P}(X)$ é um σ-anel `see` for fechado por união enumerável disjunta, diferença própria e intersecção finita.

Questão 4-) Se $\mathcal{R} \subset \mathbb{P}(X)$ é uma álgebra, são equivalentes:

a) $\mathcal{R}$ é fechado por união enumerável disjunta.

b) $\mathcal{R}$ é fechado por união enumerável crescente

c) $\mathcal{R}$ é fechado por intersecção enumerável decrescente.

Em caso afirmativo, $\mathcal{R}$ é uma σ-álgebra.

Questão 5-) Se $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}(X)$ é um semi-anel (respectivamente, uma semi-álgebra ou, mais geralmente, uma família elementar), a família formada por todas as reuniões disjuntas finitas de elementos de $\mathcal{S}$ coincide com o anel gerado por $\mathcal{S}$ (respectivamente, com a álgebra gerada por $\mathcal{S}$).

Questão 6-) Proposições 1.2 a 1.7 do Folland.

Questão 7 (generalização da prop. 1.5)**-)** Sejam $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e $X = \prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia produto. Então $\otimes_{i \in I} \mathcal{B}_{X_i} \subset \mathcal{B}_X$; vale a igualdade se X tiver base enumerável de abertos (o que é equivalente a cada X_i ter base enumerável e ser enumerável o conjunto dos $i \in I$ tal que X_i tem mais que um ponto). Como corolário, conclua que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \otimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Notação.

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ para designar uma sequência a valores em $\mathcal{A}$;
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\!\!\cdot\, \mathcal{A}$ para designar uma sequência a valores em $\mathcal{A}$ tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $m \neq n$.

Questão 8-) Sejam $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$.

(i) Existe $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\!\!\cdot\, \mathcal{A}$ tal que $(\forall 1 \leqslant k \leqslant \infty) \cup_1^k A_n = \cup_1^k A'_n$.
(ii) Existe $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ crescente tal que $(\forall 1 \leqslant k \leqslant \infty) \cup_1^k A_n = \cup_1^k A'_n$.

1 Exercícios do Folland

1.1 Seção 1.2

1-) Uma classe de conjuntos $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(X)$ chama-se *anel* se for fechada por uniões finitas e diferenças (i.e. se $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{R}$ então $\cup_1^n E_i \in \mathcal{R}$ e se $E, F \in \mathcal{R}$ então $E - F \in \mathcal{R}$). Um anel fechado por uniões enumeráveis chama-se σ-*anel*.

(a) Anéis (resp. σ-anéis) são fechados por intersecções finitas (resp. enumeráveis).
(b) Se $\mathcal{R}$ for um anel (resp. σ-anel), então $\mathcal{R}$ é uma álgebra (resp. σ-álgebra) *see* $X \in \mathcal{R}$.
(c) Se $\mathcal{R}$ for um σ-anel, então $\{E \subset X : E \in \mathcal{R} \text{ ou } E^c \in \mathcal{R}\}$ é uma σ-álgebra.
(d) Se $\mathcal{R}$ for um σ-anel, então $\{E \subset X : \forall F \in \mathcal{R}, E \cap F \in \mathcal{R}\}$ é uma σ-álgebra.

3-) Seja $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra infinita.

(a) $\mathcal{M}$ contém uma sequência infinita de conjuntos disjuntos.
(b) $\mathrm{card}(\mathcal{M}) \geqslant \mathfrak{c}$.

4-) Uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra *see* for fechada por uniões enumeráveis crescentes (i.e. se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ for uma família crescente, então $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$).

5-) Se $\mathcal{M}$ é a σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}$, então $\mathcal{M}$ é a união das σ-álgebras $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ geradas pelos subconjuntos enumeráveis $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$.