MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

http://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798
Notas da Aula 9 (11/4)

I) Aplicações do Teorema da Convergência Dominada

Teorema 1. Sejam: $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $f : X \times I \to \mathbb{R}$ tal que $\forall t \in I$, $f(\cdot, t) : X \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Defina:

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int f(x,t) d\mu(x) \end{aligned}$$

(a) Suponha que:

  (i) $\forall x \in X$, $f(x, \cdot) : I \to \mathbb{R}$ contínua em $t_0 \in I$.

  (ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que $\forall (x,t) \in X \times I$, $|f(x,t)| \leq g(x)$

  Então F é contínua em t_0. Enunciado análogo vale a continuidade sequencial de F com o parâmetro t num espaço topológico qualquer.

(b) Suponha que:

  (i) $\forall x \in X$, $f(x, \cdot) : I \to \mathbb{R}$ derivável

  (ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que $\forall (x,t) \in X \times I$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right| \leq g(x)$$

  Então F é derivável e $\forall t \in I$,

$$F'(t) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) d\mu(x)$$

  Em suma:

$$\frac{d}{dt} \int f(x,t) d\mu(x) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) d\mu(t)$$

- Prova:

  (a) Dado $t_0 \in I$, quero mostrar que $F(t_0) = \lim_{t \to t_0} F(t)$, i.e. que

$$\int f(x, t_0) d\mu = \lim_{t \to t_0} \int f(x,t) d\mu(x)$$

  Com efeito, seja $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec I$ com $t_n \to t_0$. Então a sequência de funções $\{f(\cdot, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{L}^1(\mu)$ é pontualmente convergente para $f(\cdot, t_0)$ e $|f(\cdot, t_n)| \leq g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ em X. Pelo TCD,

$$\underbrace{\int f(\cdot, t_n) d\mu}_{F(t_n)} \to \underbrace{\int f(\cdot, t_0) d\mu}_{F(t_0)}$$

  (b) Note que, fixado $t \in I$, tomando-se $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec I \backslash \{t\}$ com $t_n \to t$, tem-se: $\forall x \in X$

$$\underbrace{f(x, \cdot)'(t)}_{= \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x,t)}{t_n - t}$$

  i.e.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\cdot, t) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(\cdot, t_n) - f(\cdot, t)}{t_n - t}$$

é o limite pontual de uma sequência de funções mensuráveis $\therefore \frac{\partial}{\partial t}f(\cdot,t) : X \to \mathbb{R}$ é mensurável. Além disso, $\forall x \in X$, fixado t e tomando $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como acima, pelo TVM, $\exists \tau_n$ entre t e t_n tal que:

$$f(x,t_n) - f(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}f(x,\tau_n)\cdot(t_n - t)$$

Daí:

$$\underbrace{\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}}_{\xrightarrow{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)} \overset{(**)}{=} \frac{\partial}{\partial t}f(x,\tau_n)$$

e como, $(\forall n)$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,\tau_n)\right| \overset{(*)}{\leq} g(x)$$

segue, $(\forall x \in X)$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right| \leq g(x) \qquad \left(\therefore\ \frac{\partial}{\partial t}f(\cdot,t) \in \mathcal{L}^1(\mu)\right)$$

Assim, para esse mesmo t e sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tem-se:

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \frac{\int f(x,t_n)d\mu(x) - \int f(x,t)d\mu}{t_n - t} = \int \underbrace{\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}}_{\xrightarrow{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)} d\mu(x)$$

e a convergência é dominada por g, em vista de $(*)$ e $(**)$. Pelo TCD, conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)d\mu(x)$$

Como $(t_n)_n$ em $I\backslash\{t\}$ com $t_n \to t$ foi tomada de forma arbitrária, conclui-se que

$$\exists \lim_{x\to t}\frac{F(x) - F(t)}{x - t} = \int \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)d\mu(x)$$

$\therefore F$ derivável em t e

$$F'(t) = \int \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)d\mu(x)$$

II) Funções mensuráveis no sentido estendido

Definição 1. Sejam $(X,\mathcal{M},\mu)$ espaço de medida e $f : \text{dom } f \subset X \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$). Diz-se que f é *mensurável no sentido estendido* ou *mensurável definida q.s.* se:

(i) $\text{dom } f \in \mathcal{M}$, $\mu[(\text{dom } f)^c] = 0$

(ii) $f : (\text{dom } f, \mathcal{M}|_{\text{dom} f}) \to \mathbb{K}$ é mensurável

- Note que toda função $f : \text{dom } f \to \mathbb{K}$ mensurável no sentido estendido admite uma extensão mensurável $X \to \mathbb{K}$:
  (i) Se $(X,\mathcal{M},\mu)$ for completo, qualquer extensão de f é mensurável
  (ii) $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ dada por $\tilde{f}|_{\text{dom} f} = f$ e $\tilde{f}|_{(\text{dom} f)^c} = 0$. Definição: chama-se *extensão canônica de f*.

Definição 2. Com a notação da definição acima, seja $f : \text{dom } f \to \mathbb{K}$ mensurável no sentido estendido. Diz-se que:

(i) f é quase integrável se $\tilde{f}$ o for. Em caso afirmativo: $\int f \doteq \int \tilde{f}$. Mais geralmente, $\forall E \in \mathcal{M}$:

$$\int_E f d\mu \doteq \int_E \tilde{f} d\mu = \int \chi_E \tilde{f} d\mu$$

(ii) f é integrável se $\tilde{f}$ o for.

- (Note que a integral definida acima independe da extensão pois o complementar tem medida nula e a integral não enxerga conjuntos de medida nula.)

- Observação: Daqui em diante, diremos, simplesmente, "mensurável" no lugar de "mensurável no sentido estendido" ou "mensurável definida q.s."

III) O espaço de Banach L^1

Definição 3. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida. Definimos:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(\mu) &\to [0,\infty) \\ f &\mapsto \|f\|_1 \doteq \int |f| d\mu \end{aligned}$$

- Recorde: $\mathcal{L}^1(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} | f \text{ integrável}\}$

Proposição 1. Com a notação acima, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$:

(i) $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$

(ii) [desigualdade triangular]: $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

- Prova:

  (i)

$$\|\alpha f\|_1 = \int \underbrace{|\alpha f|}_{=|\alpha||f|} d\mu = |\alpha| \int |f| = |\alpha| \|f\|_1$$

  (ii)

$$\|f + g\|_1 = \int \underbrace{|f + g|}_{\leq |f| + |g|} \leq \int (|f| + |g|) = \int |f| + \int |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

- Assim, $\|\cdot\|_1$ é uma seminorma, no sentido da:

Definição 4. Sejam E $\mathbb{K}$-espaço vetorial. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ tal que, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$:

(i) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular)

$\|\cdot\|$ chama-se uma seminorma em E. Diz-se que $\|\cdot\|$ é uma norma se for uma seminorma tal que $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$. Um espaço normado é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\|\cdot\|$ norma em E.

- Observação: Todo espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço métrico com a métrica

$$\begin{aligned} d : E \times E &\to [0, \infty) \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

- (Para quem achar que precisa revisar Topologia Geral: estudar capítulos 4 e 5 do Folland.)

Definição 5. Um espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ diz-se um espaço de Banach se for completo com a métrica induzida por $\|\cdot\|$.

III.1) Como construir um espaço normado a partir de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial munido de uma seminorma

Proposição 2. Dados E $\mathbb{K}$-e.v. e $\|\cdot\|$ seminorma em E, $N \doteq \{x \in E | \|x\| = 0\}$ é $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de E.

- Prova: Se $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in N$, tem-se:

$$\|\alpha x + \beta y\| \overset{\text{des.}\triangle}{\leq} \underbrace{\|\alpha x\|}_{=|\alpha| \underbrace{\|x\|}_{=0}} + \underbrace{\|\beta y\|}_{=|\beta| \underbrace{\|x\|}_{=0}} = 0$$

$\therefore \|\alpha x + \beta y\| = 0 \therefore \alpha x + \beta y \in N$.

Definição 6 (quociente). Sejam E $\mathbb{K}$-e.v. e $F \subset E$ $\mathbb{K}$-subespaço de E.

- Como conjunto,

$$E/F \doteq E/\sim$$

onde $x \sim y \doteq x - y \in F$. Ou seja,

$$E/F = \{[e] = \{e\} + F | e \in E\} \subset \mathbb{P}(E)$$

- A estrutura de $\mathbb{K}$-e.v. em E/F é definida por:

$$\begin{gathered} E/F \times E/F \xrightarrow{+} E/F \\ (x+F, y+F) \mapsto (x+y)+F \\ \mathbb{K} \times E/F \xrightarrow{\cdot} E/F \\ (\alpha, x+F) \mapsto \alpha x + F \end{gathered}$$

- <u>Exercício</u>: Verifique que as operações acima estão bem definidas e, com essas operações, E/F é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, chamado <u>quociente de E por F</u>. Verifique que:

$$\begin{gathered} E \xrightarrow{\pi} E/F \\ x \mapsto x + F \end{gathered}$$

é linear e sobre E/F.

- Diagrama $(*)$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\|\cdot\|"] & \\ E/N \arrow[r, dashed, "|||\cdot|||"'] & {[0,\infty)} \end{tikzcd}$$

Proposição 3. Sejam E $\mathbb{K}$-e.v., $\|\cdot\|$ seminorma em E, $N = \{x \in E | \|x\| = 0\}$. Então existe uma única função $|||\cdot||| : E/N \to [0,\infty)$ que completa o diagrama $(*)$ (i.e. torna o diagrama comutativo). Além disso, $|||\cdot|||$ é uma norma em E/N (chama-se norma induzida por $\|\cdot\|$. Doravante, usaremos a mesma notação para a seminorma e para a norma induzida).

Demonstração. A unicidade é clara. Para a existência, ponha $|||x+N||| \doteq \|x\|$; verifique que está bem definida e é uma norma. □

- A construção acima vale, em particular, dado $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, para $E = \mathcal{L}^1(\mu)$ e $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(\mu) \to [0,\infty)$. Nesse caso:

  1. $N = \{f \in \mathcal{L}^1(\mu) | \|f\|_1 = 0\} = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ mensurável } | f = 0 \ \mu\text{-q.s.}\}$
  2. Dada $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

  $$[f] = f + N = \{g : X \to \mathbb{C} \text{ mensurável } | g = f \ \mu\text{-q.s.}\}$$

  3. **Definição**: $L^1(\mu) \doteq \mathcal{L}^1(\mu)/N$

  $$\|\cdot\|_1 : L^1(\mu) \to [0,\infty)$$

  chama-se "norma L^1" ou "norma 1" (e de fato é uma norma, como visto acima). Assim, $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ é um espaço normado.

Lema 1. Se $(E, \|\cdot\|)$ espaço vetorial normado (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). São equivalentes:

(i) $(E, \|\cdot\|)$ é completo (i.e. toda sequência de Cauchy é convergente.)

(ii) Toda série absolutamente convergente em E é convergente.

- Prova:
  - (i)⇒(ii) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série absolutamente convergente em E (i.e. tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$). Tome, $(\forall n)$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Então, $\forall n, m$ com $m < n$:

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_n \right\| \overset{\text{des } \triangle}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\| \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

  $\therefore$ $(s_n)_n$ é de Cauchy em E $\therefore$ $(s_n)_n$ é convergente.
  - (ii)⇒(i) Tome $(x_n)_n \prec E$ de Cauchy. $\vdash$ $(x_n)_n$ é convergente e, para tal, basta verificar que $(x_n)_n$ possui uma subsequência convergente. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k \in \mathbb{N} | \forall m, n \geq n_k$, $\|x_m - x_n\| < 2^{-k}$. Sem perda de generalidade (SPG) assimumos que $(n_k)_k$ é crescente. Tome $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada por $(\forall k) y_k = x_{n_k}$. Afirmo que essa é uma subsequência convergente de $(x_n)_n$. Com efeito, $\forall k > 1$,

$$\| \underbrace{y_k}_{= x_{n_k}} - \underbrace{y_{k-1}}_{= x_{n_{k-1}}} \| < 2^{-(k-1)}$$

  Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec E$ dada por:

$$\begin{aligned} z_1 &\doteq y_1 \\ z_n &\doteq y_n - y_{n-1}, \text{ para } n > 1 \end{aligned}$$

  Note que, $\forall n > 1$, $\sum_{k=1}^{n} z_k = y_n$ e $\|z_n\| = \|y_n - y_{n-1}\| < 2^{-(n-1)}$. Como $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} < \infty$, segue $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\| < \infty$ e, pela hipótese (ii), $\sum z_n$ é convergente $\therefore$ $(y_n)_n$ é convergente.

Teorema 2. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida. Então, $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Banach.

- Observação: A mesma construção e um teorema análogo valem para $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}) \doteq \{f : X \to \mathbb{R} | f \text{ é integrável}\}$ (que é um $\mathbb{R}$-e.v.), com a seminorma $\|\cdot\|_1$.
- Prova do teorema: Tome $([f_n])_{n\in\mathbb{N}} \prec L^1(\mu)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\|[f_n]\|_1}_{=\|f_n\|_1} < \infty$$

$\vdash$ $\sum_{n=1}^{\infty} [f_n]$ é convergente em L^1, i.e. $\exists [g] \in L^1(\mu)$ tal que $\sum_{k=1}^{n} [f_k] \to [g]$ em $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$. Com efeito, tome $G : X \to [0, \infty]$ dada por $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, i.e. $G = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$. Então $G \in L^+$ e, pelo TCM, tem-se:

$$\int G d\mu = \int \sum_{n} |f_n| d\mu \overset{\text{TCM}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\int |f_n| d\mu}_{=\|f_n\|_1} < \infty$$

$\therefore$ G é integrável e, em particular, finita quase sempre. Assim, $\exists N \in \mathcal{M} | \mu(N^c) = 0$ e $(\forall x \in N)$ $G(x) < \infty$, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$, logo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty$. Tome:

$$\begin{aligned} g &: X \to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) & \text{se } x \in N \\ 0 & \text{cc} \end{cases} \end{aligned}$$

Então g é mensurável, pois $g|_N$ e $g|_{N^c}$ o são. Além disso, $(\forall x \in X)$ $|g(x)| \leq G(x)$ e, como G é integrável, g também o é, i.e. $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Afirmo que $\sum_{k=1}^{n} [f_k] \to [g]$ em $L^1(\mu)$, i.e. $\|[g] - \sum_{k=1}^{n} [f_k]\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. De fato:

$$\left\| [g] - \sum_{k=1}^{n} [f_k] \right\|_1 = \left\| [g - \sum_{k=1}^{n} f_k] \right\|_1 = \left\| g - \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|_1 = \int |g - \sum_{k=1}^{n} f_k| d\mu =$$

$$= \int |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k| d\mu \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \int |f_k| d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

pois $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$.

- Notação: doravante, usaremos a mesma notação "$L^1(\mu)$" para denotar $\mathcal{L}^1(\mu)$ ou $\mathcal{L}^1(\mu)/N$ (cujos elementos são classes de equivalência de funções integráveis). Desse modo, "$f \in L^1(\mu)$" poderá significar "$f : X \to \mathbb{C}$ integrável" ou a classe de equivalência de uma tal f módulo funções mensuráveis nulas μ-q.s., i.e. $\{g : X \to \mathbb{C}$ mensurável $|g = f\ \mu\text{-q.s.}\}$.

Proposição 4. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $Y \doteq \{\varphi : X \to \mathbb{C} : \varphi$ simples e integrável$\}$. Então Y é denso em $L^1(\mu)$.

- Prova: Tome $f \in L^1(\mu)$. $\vdash \exists\ (\varphi_n)_n$ sequência de funções simples integráveis tal que $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ (de modo que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $[\varphi_{n_0}] \in B_\varepsilon([f])$, donde a densidade afirmada). Com efeito, existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções simples $X \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{\text{p.}} f$ e $(\forall n)$ $|\varphi| \leq |\varphi_{n+1}| \leq |f|$. Assim, $\varphi_n - f \xrightarrow{\text{p.}} 0$ e $(\forall n)$ $|\varphi_n - f| \leq |\varphi_n| + |f| \leq 2|f|$ de modo que $\|\varphi_n - f\|_1 = \int |\varphi_n - f| d\mu \to 0$, pelo TCD.

Corolário 1. Considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \mu)$ com μ medida de Lebesgue-Stieltjes. Tem-se:

(i) $\tilde{Y} \doteq \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ simples integrável da forma $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{I_i}$, com $(\forall i) I_i$ intervalo aberto$\}$ é denso em $L^1(\mu)$

(ii) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua tal que $\operatorname{supp} f \doteq \overline{\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}} \subset\subset \mathbb{R}\}$ (i.e. o conjunto das funções contínuas com suporte compacto) é denso em $L^1(\mu)$.

- Exercício: Sejam $[a, b]$ intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $C^0([a, b], \mathbb{C}) \doteq \{f : [a, b] \to \mathbb{C}$ contínua$\}$ e

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : C^0([a,b], \mathbb{C}) &\to [0, \infty) \\ f &\mapsto \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

Então $\big(C^0([a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_1\big)$ é um espaço normado e seu completamento é $\big(L^1([a, b], \mathcal{B}|_{[a,b]}, m), \|\cdot\|_1\big)$.

- Dica para o exercício: Tome $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrável, de modo que

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & x \in [a,b] \\ 0 & \text{cc} \end{cases} \end{aligned}$$

é um elemento de $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, m)$ e use (ii) do corolário anterior.

- Prova do corolário:

(i) Basta provar que, $\forall \varepsilon > 0$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ simples integrável, $\exists \psi \in \tilde{Y}$ tal que $\|\varphi - \psi\|_1 < \epsilon$. Seja $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ na representação padrão de modo que $|\varphi| = \sum_{i=1}^n |a_i| \chi_{E_i}$ e

$$\infty > \int |\varphi| d\mu \overset{(\forall i)}{\geq} \int \chi_{E_i} |\varphi| = |a_i| \mu(E_i)$$

e, portanto, $\mu(E_i) < \infty$ se $a_i \neq 0$. Dado $\varepsilon' > 0$ (a ser escolhido posteriormente), posso, $\forall i$ tal que $a_i \neq 0$, tomar J_i uma união finita disjunta de intervalos abertos tal que $\mu(J_i \Delta E_i) < \varepsilon'$ (vide última proposição da lista de propriedades de regularidade das medidas de Lebesgue-Stieltjes). Ou seja:

$$\|\chi_{E_i} - \chi_{J_i}\|_1 = \int \chi_{J_i \Delta E_i} d\mu < \epsilon'.$$

Tome $\psi \doteq \sum_{i=1}^n a_i \chi_{J_i} \in \tilde{Y}$. Tem-se:

$$\underbrace{\|\varphi - \psi\|_1}_{= \sum_{i=1}^n a_i (\chi_{E_i} - \chi_{J_i})} \overset{\text{des } \triangle}{\leq} \sum_{i=1}^n |a_i| \underbrace{\|\chi_{E_i} - \chi_{J_i}\|_1}_{< \varepsilon'} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right) \varepsilon'$$

Agora basta escolher ε' tal que

$$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{\left(\sum_{i=1}^n |a_i|\right) + 1}$$

e segue a tese.

(ii) Para cada intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ de medida μ finita, aproxime χ_J na norma 1 por uma função contínua de suporte compacto, e a seguir aplique a parte (i).