MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 8 (6/4)`

I) Integrais de Funções Positivas (continuação)

Teorema 1 (Lema de Fatou). Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec L^+$. Então

$$\int \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int f_n$$

Corolário 1. Se $(f_n)_n \prec L^+$ e $f_n \xrightarrow{p} f (\in L^+)$

$$\int f \leq \underline{\lim} \int f_n$$

Prova:

$$\int f = \int \lim f_n = \int \underline{\lim} f_n \overset{\text{Fatou}}{\leq} \underline{\lim} \int f_n$$

Prova do Lema de Fatou:

$$\underline{\lim} f_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\inf_{k\geq n} f_k}_{\doteq g_n}$$

Note que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência crescente em L^+. Pelo TCM

$$\int \underline{\lim} f_n = \int \lim_{n\to\infty} g_n \overset{\text{TCM}}{=} \lim \int g_n \leq \underline{\lim} \int f_n$$

Exercício: (a integral não enxerga conjuntos de medida nula)

1) Dada $f \in L^+$,

$$\int f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \mu\text{-q.s.}$$

2) Dadas $f, g \in L^+$, são equivalentes:
   (i) $\forall E \in \mathcal{M}$, $\int_E f = \int_E g$
   (ii) $f = g$ μ-q.s.

3) Nos teoremas de convergência (i.e., TCM, lema de Fatou e TCD, a ser visto) convergência pontual pode ser substituida por convergência μ-q.s.
   Exemplo: se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec L^+$, $f \in L^+$, $f_n \overset{p}{\nearrow} f$ μ-q.s., então, $\inf f_n \nearrow \int f$.

I.1) Integral de funções a valores em $\mathbb{R}$

Definição 1. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida. Dada $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, diz-se que:

- f é *quase-integrável* se $\int f^+ < \infty$ ou $\int f^- < \infty$. Nesse caso, $\int f \doteq \int f^+ - \int f^-$.
- f é *integrável* se $\int f^+ < \infty$ e $\int f^- < \infty$.

Proposição 1. Com a notação acima, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável é integrável $\Leftrightarrow$ $|f|$ o for, i.e. $\int |f| < \infty$.

Definição 2. Com a notação acima,

$$\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}) \doteq \{f : X \to \mathbb{R} \text{ integrável}\}$$

Proposição 2. Com a notação acima, $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ é $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathbb{R}^X$ e $\int \cdot : \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é linear.

- Prova:

1. Se $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$|\alpha f + \beta g| \leq |a||f| + |\beta||g|$$

$\therefore$ $\alpha f + \beta g$ é mensurável e

$$\int |\alpha f + \beta g| \leq \int |\alpha||f| + |\beta||g| = |\alpha| \int |f| + |\beta| \int |g| < \infty$$

o que mostra $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ $\therefore$ $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ é $\mathbb{R}$-subespaço de $\mathbb{R}^X$.

2. Afirmação: $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$, $\int cf = c \int f$. Com efeito:
   (i) Se $c = 0$, trivial
   (ii) Se $c \neq 0$:
      * Se $c > 0$, $(cf)^+ = cf^+$, $(cf)^- = cf^-$
      * Se $c < 0$, $(cf)^+ = [(-c)(-f)]^+ = (-c)(-f)^+ = -cf^-$, $(cf)^- = -cf^+$ ($(-f)^+ = \max\{-f, 0\} = -\min\{f, 0\} = f^-$, analogamente $(-f)^- = f^+$.)

   Assim, em qualquer dos casos, decorre da defnição da integral e do fato de que a integral de função positiva é positivamente homogênea que $\int cf = c \int f$.

3. Afirmação: $\forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$, $\int (f + g) = \int f + \int g$. Prova:

$$\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ g = g^+ - g^- \end{cases}$$

Seja $h \doteq f + g$, $h = h^+ - h^-$. Tem-se:

$$\begin{aligned} & h^+ - h^- = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) \Leftrightarrow h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^- \\ & \therefore \int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int h^- \text{ (pois } \textstyle\int \cdot \text{ é aditiva em } L^+) \\ & \therefore \int h^+ - \int h^- = \left(\int f^+ - \int f^- \right) + \int g^+ - \int g^- \end{aligned}$$

I.2) Integral de funções a valores em $\mathbb{C}$

Definição 3 (Integral de funções a valores em $\mathbb{C}$). Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável. f diz-se <u>integrável</u> se $\int |f| < \infty$.

Proposição 3. Com a notação acima, $f : X \to \mathbb{C}$ é integrável $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\ f : X \to \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}\ f : X \to \mathbb{R}$ o forem.

- <u>Prova</u>: Basta observar que:

$$|f| \leq |\mathrm{Re}\ f| + |\mathrm{Im}\ f| \leq 2|f|$$

(pois, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq |\mathrm{Re}\ z| + |\mathrm{Im}\ z| \leq 2|z|$).

Definição 4. Com a notação acima, se $f : X \to \mathbb{C}$ integrável,

$$\int f \doteq \int \mathrm{Re}\ f + i \int \mathrm{Im}\ f$$

Definição 5. Com a notação acima:

$$\mathcal{L}^1(\mu) \doteq \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{C}) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ integrável}\}$$

Proposição 4. Com a notação acima, $\mathcal{L}^1(\mu)$ é $\mathbb{C}$-subsepaço vetorial $\mathbb{C}^X$ e $\int \cdot : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{C}$ é linear.

- <u>Prova</u>:

1. Se $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|$$

$\therefore$ $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

2. A linearidade decorre da linearidade da integral de funções a valores em $\mathbb{R}$ e da definição de $\int \cdot$ para funções $X \to \mathbb{C}$.

Proposição 5 (Desigualdade tringular integral). Com a notação acima, se $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, então

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$$

- Prova: Tome $\alpha \doteq \text{sgn}\ (\int f d\mu)$ de modo que

$$\left|\int f d\mu\right| = \overline{\alpha}\int f d\mu = \int \overline{\alpha} f = \int \text{Re}\ (\overline{\alpha} f) \overset{(*)}{\leq} \int |\text{Re}\ (\overline{\alpha} f)| \overset{\text{monotonicidade}}{\leq} \int |\overline{\alpha} f|$$

$$\text{Prova de}(*):\ \forall g : X \to \mathbb{R} \text{ integrável}, \int g = \int g^+ - \int g^- \leq \int g^+ + \int g^- = \int |g|$$

  - Se $\int f d\mu \neq 0$, $|\overline{\alpha}| = 1 \therefore \int |\overline{\alpha} f| = \int |f| \therefore |\int f d\mu| \leq \int |f|$
  - Se $\int f d\mu = 0$, então $|\int f d\mu| = 0 \leq \int |f| d\mu$

I.3) Teorema da Convergência Dominada

Teorema 2 (da convergência dominada de Lebesgue). Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{C})$ e $f : X \to \mathbb{C}$ tais que $f_n \xrightarrow{p.} f$ e $\exists g : X \to [0, \infty] \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})\ |f_n| \leq g$. Então, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e $\int f_n \to \int f$.

- Prova:

  1. É claro que $f : X \to \mathbb{C}$ é mensurável (pois $f = \lim f_n$) e

$$|f| = |\lim f_n| = \lim \underbrace{|f_n|}_{\leq g} \leq g$$

$$\therefore \int |f| \leq \int g < \infty$$

$$\therefore f \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

  2. Resta verificar $\int f_n \to \int f$, i.e., $\int \text{Re}\ f_n \to \int \text{Re}\ f$ e $\int \text{Im}\ f_n \to \int \text{Im}\ f$. Como $\text{Re}\ f_n \xrightarrow{p} \text{Re}\ f$ e $\text{Im}\ f_n \xrightarrow{p} \text{Im}\ f$ e $|\text{Re}\ f_n| \leq g$ e $|\text{Im}\ f_n| \leq g$ basta provar o caso em que as funções tomam valores em $\mathbb{R}$, i.e., $(\forall n)\ f_n : X \to \mathbb{R}$, $f_n \xrightarrow{p} f : X \to \mathbb{R}$ e $(\forall n)\ \max\{f_n, -f_n\} = |f_n| \leq g$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g - f_n \geq 0$ e $g + f_n \geq 0$. Logo, pelo lema de Fatou:

$$\text{(i)} \int \underbrace{\underline{\lim}(g - f_n)}_{= g + \underbrace{\underline{\lim}(-f_n)}_{= -f}} \overset{\text{LF}}{\leq} \underline{\lim} \underbrace{\int (g - f_n)}_{= \int g - \int f_n}$$

$$\text{(ii)} \int \underbrace{\underline{\lim}(g + f_n)}_{= g + \underbrace{\underline{\lim} f_n}_{= f}} \overset{\text{LF}}{\leq} \underline{\lim} \underbrace{\int (g + f_n)}_{= \int g + \int f_n}$$

De (i):

$$\int g - \int f \leq \underline{\lim}\left(\int g - \int f_n\right) = \int g + \underline{\lim}\left(-\int f_n\right) = \int g - \overline{\lim}\int f_n$$

e, como, $\int g < \infty$, segue: $\overline{\lim} \int f_n \leq \int f$.
De (ii):

$$\int g + \int f \leq \underline{\lim}\left(\int g + \int f_n\right) = \int g + \underline{\lim}\int f_n$$

$$\therefore \int f \leq \underline{\lim}\int f_n$$

$$\therefore \overline{\lim}\int f_n \leq \int f \leq \underline{\lim} f_n$$

$$\therefore \overline{\lim}\int f_n = \underline{\lim}\int f_n = \int f$$

- Exercícios: Fixe $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida.
  1. Se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrável, $\{x \in X : |f(x)| = \infty\}$ é nulo e $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ é σ-finito.
  2. Se $f : X \to \mathbb{C}$ integrável, $\{x \in X, f(x) \neq 0\}$ é σ-finito.
  3. A integral "não enxerga conjuntos nulos", i.e.:
     (i) Dadas $f, g : X \to \mathbb{C}$ integráveis, são equivalentes:
       (a) $\int |f - g| = 0$
       (b) $\forall E \in \mathcal{M}$, $\int_E f = \int_E g$
       (c) $f = g$ μ-q.s.

     (ii) No teorema da convergência dominada, podemos substituir convergência pontual por convergência μ-q.s., i.e., se

$$\begin{cases} (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sequência de funções mensuráveis } X \to \mathbb{C} \\ f : X \to \mathbb{C} \text{ mensurável} \\ f_n \to f \ \mu\text{-q.s.} \\ g \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ e } (\forall n)\ |f_n| \leq g \ \mu\text{-q.s.} \end{cases}$$

     então $\int f_n \to \int f$.
  4. A integral é compatível com restrições:

$$\text{Tome } \begin{cases} E \in \mathcal{M} \\ \mathcal{M}|_E = \{F \in \mathcal{M} | F \subset E\} \\ \mu|_E : \mathcal{M}|_E \to [0, \infty] \\ \qquad\quad F \mapsto \mu(F) \end{cases}$$

     Se $f : X \to \mathbb{C}$ for integrável em E i.e. $\chi_E \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, então $f|_E \in \mathcal{L}^1(\mu|_E)$ e $\int_E f d\mu = \int f|_E d(\mu|_E)$.

II) Comparação entre as Integrais de Lebesgue e de Riemann

Proposição 6. Seja $a < b$ reais. Considere o espaço de medida $([a, b], \mathcal{L}|_{[a,b]}, m)$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Defino:

$$s(f) \doteq \left\{ \int \phi : \phi \text{ simples e } \phi \leq f \right\}$$
$$S(f) \doteq \left\{ \int \phi : \phi \text{ simples e } \phi \geq f \right\}$$

Então:

(i) $s(f) \neq \emptyset$ e limitado superiormente e $S(f) \neq \emptyset$ e limitado inferiormente.

(ii) $\underline{\int} f \doteq \sup s(f)$ e $\overline{\int} f \doteq \inf S(f)$

Então, $\underline{\int} f = \overline{\int} f \Leftrightarrow f$ Lebesgue mensurável. Em caso afirmativo,

$$\int_{[a,b]} f = \underline{\int} f = \overline{\int} f$$

Proposição 7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada.

(i) Se f for R-integrável, então f é Lebesgue-integrável e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm$$

(ii) f é R-integrável see

$$m(\{x \in [a, b] | f \text{ descontínua em } x\}) = 0$$

- Prova:

(i) Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ partição de $[a, b]$. Para $1 \leq i \leq n$: $m_i = \inf\{f(t) : t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$ e $M_i = \sup\{f(t) : t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$.

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$
$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$
$$\underline{\int_a^b} f \doteq \sup\{s(f, P) : P \text{ partição de } [a, b]\}$$
$$\overline{\int_a^b} f \doteq \inf\{s(f, P) : P \text{ partição de } [a, b]\}$$

Por hipótese: $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \vdash f$ é Lebesgue-integrável e $\int_{[a,b]} f dm = \int_a^b f$. Com efeito, para cada partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ de $[a, b]$ como anteriormente, definimos:

$$g_P \doteq \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \chi_{(t_{i-1}, t_i]} \qquad \text{(de modo que } \int g_P dp = s(f, P)\text{)}$$
$$G_P \doteq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \chi_{(t_{i-1}, t_i]} \qquad (\therefore \int G_P dm = S(f, P))$$

Tome $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sequeência de partições tais que:

(i) $(\forall i) P_i \subset P_{i+1}$

(ii) $s(f, P_i) \to \underline{\int_a^b} f$ e $S(f, P_i) \to \overline{\int_a^b} f$

Tome $g_i \doteq g_{P_i}$ e $G_i \doteq G_{P_i}$, $i \in \mathbb{N}$, de modo que $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é sequência crescente (Se $P \subset Q$, $g_P \leq g_Q$.) e $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é decrescente e $(\forall i)$ $g_i \leq f \leq G_i$ m-q.s. (i.e. as desigualdades valem em todo ponto, exceto, possivelmente,em a, pelo fato de termos tomado intervalos semiabertos à esquerda na definição de g_P e G_P). Tome $g = \lim g_i$ e $G = \lim G_i$ de modo que g e G são borelianas e $g \leq f \leq G$ m-q.s.

<u>Afirmação</u>: g e G são Lebesgue-integráveis e $\int g dm = \underline{\int_a^b} f$, $\int G = \overline{\int_a^b} f$. Nesse caso, $\int g dm = \int G dm$, i.e.

$$\int \underbrace{(G - g)}_{\geq 0} dm = 0$$

$\therefore g = G$ m-q.s., $\therefore f = g$ m-q.s., $\therefore f$ é Lebesgue-integrável e

$$\therefore \int_{[a,b]} f dm = \int g dm = \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f(x) dx$$

<u>Prova da afirmação</u>: $\exists m = \inf \text{Im} f \in \mathbb{R}$ e $M = \sup \text{Im} f \in \mathbb{R}$ de modo que, $\forall i \in \mathbb{N}$ e m-q.s. em $[a, b]$: $m \leq g_i \leq M$ e $m \leq G_i \leq M$, logo:

$$|g_i| \leq \max\{M, -m\} \cdot \chi_{[a,b]}$$
$$|G_i| \leq \max\{M, -m\} \cdot \chi_{[a,b]}$$

Pelo TCD:

$$\int g_i dm = \underbrace{s(f, P_i)}_{\to \underline{\int_a^b} f} \to \int g dm$$
$$\int G_i dm = \underbrace{S(f, P_i)}_{\to \overline{\int_a^b} f} \to \int G dm$$

Por unicidade do limite, segue

$$\int g dm = \underline{\int_a^b} f$$
$$\int G dm = \overline{\int_a^b} f$$

(ii) (Está como exercício na lista 7.)

- Exercício: Pode-se enunciar algo similar a (i) na última proposição para integrais de Riemann impróprias. Por exemplo: Seja $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ e R-integrável em $[a, b]$ $\forall b > a$. Então, são equivalentes as seguintes condições:

  (i) $\int_a^\infty f$ é absolutamente convergente (i.e. $\int_a^\infty |f| < \infty$).

  (ii) f é Lebesgue-integrável em $[a, \infty)$

  Em caso afirmativo, $\int_a^\infty f(x)dx = \int_{[a,\infty)} f dm$ (sugestão: tome uma sequência $b_n \nearrow \infty$ e use os teoremas de convergência para investigar os limites das integrais de $\chi_{[a,b_n]}|f|$ e $\chi_{[a,b_n]} f$.)

- Observação: Disso decorre que, se $\int_a^\infty f$ for condicionalmente convergente, f não é Lebesgue-integrável em $[a, \infty)$.