MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

http://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798

Notas da Aula 7 (4/4)

I) Integrais de Funções Positivas

- Fixaremos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ até o final desta seção.

Definição 1. $L^+ \doteq \{f : X \to [0, \infty] \text{ mensurável}\}$

Definição 2. Seja $\phi \in L^+$, simples. Seja $\sum_{i=1}^n a_n \chi_{E_i}$ a representação padrão de ϕ (i.e., Im $\phi = \{a_1, \cdots, a_n\}$ com $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$, $E_i = \phi^{-1}(\{a_i\})$, $1 \leq i \leq n$). A *integral* de ϕ é $\sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) \in [0, \infty]$.

- Notações:

$$\int \phi d\mu, \qquad \int \phi, \qquad \int \phi(x) d\mu(x), \qquad \int \phi(x) \mu(dx)$$

- Se $A \in \mathcal{M}$:

$$\int_A \phi d\mu \doteq \int \chi_A \phi d\mu$$

Proposição 1. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $\phi, \psi \in L^+$ simples, $c \geq 0$. Tem-se:

(i) $\int c\phi = c \int \phi$

(ii) $\int \phi + \psi = \int \phi + \int \psi$

(iii) Se $\phi \leq \psi$, $\int \phi \leq \int \psi$

- Prova:

(a) É claro se $c = 0$. Se $c > 0$ e se $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ representação padrão de ϕ, a representação padrão de $c\phi = \sum_{i=1}^n ca_i \chi_{E_i}$ e aí a igualdade é clara também.

(b) Sejam $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$, $\psi = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{F_j}$, $\phi + \psi = \sum_{k=1}^l c_k \chi_{G_k}$ representações padrão de ϕ, ψ e $\phi + \psi$, respectivamente. Note:

$$\dot{\bigcup_{i=1}^n} E_i = \dot{\bigcup_{j=1}^m} F_j = \dot{\bigcup_{k=1}^l} G_k = X$$

(por definição de representação padrão). Tem-se:

1)

$$\int \phi = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) \underset{E_i = \dot\cup_{j=1}^m E_i \cap F_j}{\underset{\uparrow}{=}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \mu(E_i \cap F_j)$$

2) Analogamente,

$$\int \psi = \sum_{j=1}^m b_j \mu(F_j) = \sum_{i,j} b_j \mu(F_j \cap E_i)$$

De 1) e 2):

$$\int \phi + \int \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) \mu(E_i \cap F_j)$$

3)

$$\int \phi + \psi = \sum_{k=1}^{l} c_k \mu(G_k) \overset{(*)}{=} \sum_{i,j,k} c_k \mu(G_k \cap E_i \cap F_j) \qquad (**)$$

$(*)$ note que:

$$\dot{\bigcup}_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} E_i \cap F_j = X$$
$$\therefore\ \forall k,\ G_k = \dot{\bigcup}_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} (G_k \cap E_i \cap F_j)$$

Ora, $\forall i,j,k | E_i \cap F_j \cap G_k \neq \emptyset$, $c_k = a_i + b_j$ (pois, se $x \in E_i \cap F_j \cap G_k$, $\phi(x) = a_i$, $\psi(x) = b_j$ e $(\phi+\psi)(x) = c_k$). Daí, $\forall i,j,k$:

$$c_k \mu(G_k \cap E_i \cap F_j) = (a_i + b_j)\mu(G_k \cap E_i \cap F_j)$$

$$\therefore\ (**) = \sum_{i,j,k}(a_i+b_j)\mu(G_k \cap E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{l}(a_i+b_j)\mu(G_k \cap E_i \cap F_j)\right)}_{= (a_i+b_j)\underbrace{\sum_{k=1}^{l}\mu(G_k \cap E_i \cap F_j)}_{=\mu(E_i \cap F_j)}} = \int(\phi+\psi)$$

(c) Sejam $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ e $\psi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{E_j}$ (representação padrão) com $\phi \le \psi \vdash \int \phi \le \int \psi$
Tem-se:

$$\int \phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \mu(E_i \cap F_j) \overset{\text{afirmação}}{\le} \sum_{i,j} b_j \mu(E_i \cap F_j) = \int \psi$$

Afirmação: $(\forall i,j)\ a_i\mu(E_i \cap F_j) \le b_j \mu(E_i \cap F_j)$
Prova da afirmação: Se $E_i \cap F_j = \emptyset$, $0 \le 0$. Se $E_i \cap F_j \neq 0$, tome $x \in E_i \cap F_j$, $a_i = \phi(x) \le \psi(x) = b_j$

Corolário 1.

(i) Se $(\phi_i)_{1\le i\le n} \prec L^+$, ϕ_i simples, então

$$\int \sum_{i=1}^{n} \phi_i = \sum_{i=1}^{n} \int \phi_i$$

Basta usar (ii) da proposição anterior e indução sobre n.

(ii) Se $\phi \in L^+$ simples e $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ (não necessariamente a representação padrão), então

$$\int \phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

Basta aplicar o item anterior com $\phi_i = a_i \chi_{E_i}$ para $1 \le i \le n$.

Proposição 2. $E \in \mathcal{M} \mapsto \int_E \phi \in [0,\infty]$ é uma medida.

(Decorre da σ-aditividade da medida, e isso garante boas prorpiedades de convergência para a integral, como veremos.)

- Prova: Seja $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ representação padrão

  1) Se $E = \emptyset$

$$\int_{\emptyset} \phi = \int \chi_{\emptyset}\phi = \int 0 = 0$$

2) Sejam $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$, $A = \dot\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Tem-se:

$$\int_A \phi = \int \chi_A \phi = \int \sum_{i=1}^n a_i \underbrace{\chi_A \chi_{E_i}}_{=\chi_{A\cap E_i}} \overset{\text{cor. } 1}{=} \sum_{i=1}^n a_i \mu \underbrace{(A\cap E_i)}_{=\dot\cup_{n\in\mathbb{N}}(E_i\cap A_n)} \overset{\mu\ \sigma \text{ aditiva!}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{n\in\mathbb{N}} a_i \mu(E_i \cap A_n) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i\cap A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int \sum_{i=1}^n a_i \underbrace{\chi_{E_i\cap A_n}}_{\chi_{E_i}\chi_{A_n}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int \chi_{A_n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}\right)}_{\phi} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} \phi$$

Definição 3. Para $f \in L^+$

$$\int f = \sup\left\{\int \phi : \phi \in L^+ \text{ simples, } \phi \le f\right\} \in [0,\infty]$$

- Observação: Se $\phi \in L^+$ simples

$$\int_{\text{nova}} \phi = \sup\left\{\int_{\text{antiga}} \psi : \psi \in L^+ \text{ simples } \psi \le \phi\right\}$$

$$\therefore \int_{\text{antiga}} \phi \le \int_{\text{nova}} \phi$$

e, $\forall \psi \in L^+$ simples com $\psi \le \phi$,

$$\int_{\text{antiga}} \psi \overset{\text{por (iii)}}{\le} \int_{\text{antiga}} \phi$$

$$\therefore \int_{\text{nova}} \phi = \sup\left\{\int_{\text{antiga}} \psi : \psi \in L^+ \text{ simples, } \psi \le \phi\right\} \le \int_{\text{antiga}} \phi$$

$$\therefore \int_{\text{antiga}} \phi = \int_{\text{nova}} \phi$$

Proposição 3. $\forall f, g \in L^+$, $\forall c \in [0,\infty)$:

(1) $\int cf = c\int f$

(2) Se $f \le g$, $\int f \le \int g$

Definição 4. Se $f \in L^+$, $A \in \mathcal{M}$

$$\int_A f \doteq \int f\chi_A$$

Definição 5. Diz-se que $f \in L^+$ é integrável (ou somável) se $\int f < \infty$

Teorema 1 (Teorema da convergência monótona). Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec L^+$ sequência crescente. Então,

$$\int \underbrace{\lim f_n}_{\in L^+} = \lim \int f_n$$

- (O que garante este teorema é o fato de a medida ser enumeravelmente aditiva!)
- Prova: Note que, por monotonicidade da $\int \cdot$, $(\int f_n)_n \prec [0,\infty]$ é seq crescente

$$\therefore \exists \ell \lim \int f_n = \sup\left\{\int f_n : n \in \mathbb{N}\right\} \in [0,\infty]$$

Seja $f = \lim f_n \in L^+$, $\vdash \int f = \ell$
Como $(\forall n)$ $f_n \le f$, por monotonicidade $\int f_n \le \int f$

$$\therefore \ell = \lim \int f_n \le \int f = \sup\left\{\int \phi : \phi \in L^+ \text{ simples,} \phi \le f\right\}$$

$\vdash \forall \phi \in L^+$ simples com $\phi \le f$, tem-se $\ell = \lim \int f_n \ge \int \phi$.

Seja $\phi \in L^+$ simples com $\phi \leq f$. Tome $\alpha \in (0,1)$. Então, $\forall x \in X$, ou $f(x) = 0$ ou $\alpha\phi(x) < f(x)$. No primeiro caso, $(\forall n) f_n(x) = 0 = \phi(x)$ e, no segundo, como $f_n(x) \nearrow f(x) > \alpha\phi(x)$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} | f_{n_0}(x) \geq \alpha\phi(x)$. Assim, tomando, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$E_n \doteq \{x \in X | f_n(x) \geq \alpha\phi(x)\} \in \mathcal{M}$$

Tem-se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência crescente em $\mathcal{M}$ e $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int f_n \geq \int f_n \chi_{E_n} = \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} \alpha\phi = \alpha \underset{\substack{\downarrow \\ \int_X \phi (*)}}{\int_{E_n} \phi} \to \alpha \int \phi$$

$$(*) \text{ pois } \mathcal{M} \to [0,\infty],\ E \mapsto \int_E \phi \text{ é medida}$$

$$\therefore\ \ell = \lim \int f_n \geq \alpha \int \phi$$

Como isso vale $\forall \alpha \in (0,1)$, conclui-se que

$$\ell \geq \sup\left\{\alpha \int \phi : \alpha \in (0,1)\right\} = \int \phi$$

Ou seja, $\ell = \lim \int f_n$ é cota superior de $\{\int \phi : \phi \in L^+ \text{ simples com } \phi \leq f\} \therefore \ell \geq \int f$. Então $\ell = \int f$ (Usamos fortemente o fato de $E \in \mathcal{M} \mapsto \int_E \phi$ ser medida.)

Corolário 2. Seja $(f_n)_n$ sequência em L^+ (finita ou infinita). Então,

$$\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$$

Prova:

1) Para sequências finitas. Basta provar para dois somandos, digamos, f e $g \in L^+$.

Tome $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência crescente de funções em L^+ simples tal que $\phi_n \overset{p}{\nearrow} f$ e $(\psi_n)_n$ seq crescente em L^+ simples com $\psi_n \nearrow \psi$. Então $(\phi_n + \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência crescente em L^+ simples e $(\phi_n + \psi_n) \nearrow (f+g)$. Então:

$$\int f + \int g \overset{\text{TCM}}{=} \underbrace{\lim \int \phi_n}_{=\int f} + \underbrace{\lim \int \psi_n}_{=\int g} = \lim \underbrace{\left(\int \phi_n + \int \psi_n\right)}_{=\int(\phi_n+\psi_n)} = \int (f+g)$$

2) Para sequência infinita $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec L^+$

$$\int \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n}_{= \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{k} f_n}_{g_k}} \overset{\text{TCM}}{=} \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int \sum_{n=0}^{k} f_n}_{\overset{1)}{=} \sum_{n=0}^{k} \int f_n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int f_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n$$