MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 6 (30/3)`

I) Medidas de Radon em $\mathbb{R}$ (continuação).

`I.1) Propriedades da medida de Lebesgue.` Se $F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{L} \doteq \mathcal{M}_F$ é a σ-álgebra de Lebesgue e $m \doteq \mu_F : \mathcal{L} \to [0,\infty]$ é a medida de Lebesgue. Conforme visto acima, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ é o completamento de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$. Além disso, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathbb{P}(\mathbb{R})$

Proposição 1. Com a notação acima, considere, $\forall r \in \mathbb{R}$, $\tau_r, \mu_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por, respectivamente, $x \mapsto x + r$ e $x \mapsto rx$. Tem-se:

(i) $\forall A \in \mathcal{L} : A + r \doteq \tau_r(A) \in \mathcal{L}$ e $m(A + r) = m(A)$

(ii) $\forall A \in \mathcal{L}, rA \doteq \mu_r(A) \in \mathcal{L}$ e $m(rA) = |r|m(A)$

Prova:

(i) Se $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, A + r = \tau_r(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (pois $(\tau_r)^{-1} = \tau_{-r}$ é contínua e $A + r = (\tau_{-r})^{-1}(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$). Além disso, $m(A + r) = m(A)$, com efeito:

- Tome

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} &\to [0,\infty] \\ D &\mapsto m(D + r) \end{aligned}$$

então ν é uma medida (pois $\nu(\emptyset) = 0$ e se $(A_n)_n \prec \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,

$$\nu\left(\dot{\bigcup}_n A_n\right) = m\left(\left(\dot{\bigcup}_n A_n\right) + r\right) = m\left(\dot{\bigcup}_n (A_n + r)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n + r) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n))$$

e ν coincide com m em $(a, b]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$

- Pela unicidade anteriormente vista, conclui-se que $\nu = m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$. em particular, se $N \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $m(N) = 0$, $m(N + r) = 0$. Ora, seja $A \in \mathcal{L}$. Existem $\tilde{A} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $\tilde{N} \subset \mathbb{R} | \exists N \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ com $\tilde{N} \subset N$, $m(N) = 0$ e $A = \tilde{A} \cup \tilde{N}$ (pois $\mathcal{L}$ é o completamento de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ com respeito a m). Então:

$$\tau_r(A) = \underbrace{\tau_r(\tilde{A})}_{\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}} \cup \underbrace{\tau_r(\tilde{N})}_{\subset \tau_r(N)} \text{ e } m(\tau_r(N)) = m(N) = 0$$

$$\therefore\ \tau_r(A) \in \mathcal{L} \text{ e } m(\tau_r(A)) = m(\tau_r(\tilde{A})) = m(\tilde{A}) = m(A)$$

(ii) Se $r = 0$, a afirmação é trivial. Suponha $r \neq 0$, então $\mu_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é homeomorfismo com inversa, $\mu_{1/r}$ e, pelo mesmo argumento de (i), conclui-se que se $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $rA = \mu_r(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e, tomando

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} &\to [0,\infty] \\ D &\mapsto \frac{1}{|r|} m(rD) \end{aligned}$$

então ν é uma medida e, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$,

$$\nu((a,b]) = \underbrace{\frac{1}{|r|} m(r(a,b])}_{= \begin{cases} \dfrac{br - ar}{r} = b - a \text{ se } r > 0 \\ \dfrac{ar - br}{-r} = b - a \text{ se } r < 0 \end{cases}} = m((a,b])$$

$$\therefore\ \nu = m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$$

Assim, $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,

$$m(A) = \frac{1}{|r|} m(rA) \Leftrightarrow |r| m(A) = m(rA)$$

O resto é idêntico a (i)

II) Aplicações Mensuráveis (continuação).

Proposição 2. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis $(X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$. Então $g_1 \doteq \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n, g_2 \doteq \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n, g_3 \doteq \overline{\lim}\, u_n$ e $g_4 \doteq \underline{\lim}\, u_n$ são mensuráveis.

- Observação:

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n &: X \to \overline{\mathbb{R}} \\ & x \mapsto \sup\{u_n(x), n \in \mathbb{N}\} \\ \overline{\lim} u_n &: X \to \overline{\mathbb{R}} \\ & x \mapsto \overline{\lim}\, u_n(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} u_n(x) \end{aligned}$$

- Prova:

  (i) $\forall a \in \mathbb{R}$

$$g_1^{-1}((a,\infty]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} u_n^{-1}((a,\infty]) \in \mathcal{A}$$

  Isso mostra que g_1 é mensurável.

  (ii) $\forall a \in \mathbb{R}$

$$g_2^{-1}([-\infty,a)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} u_n^{-1}([-\infty,a)) \in \mathcal{A}$$

  $\therefore$ g_2 é mensurável.

  (iii) Para g_3, aplica-se (i) e (ii) em cascata, para g_4, aplica-se (ii) e (i) em cascata.

Corolário 1. Se $f, g : (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, $\max\{f,g\}$ e $\min\{f,g\}$ são mensuráveis.

Corolário 2. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções mensuráveis $(X,\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ pontualmente convergente para $f : X \to \mathbb{C}$. Então f é mensurável.

- Prova: $\mathrm{Re} f = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re} f_n$ é mensurável $X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\therefore$ é mensurável $X \to \mathbb{R}$. Analogamente, $\mathrm{Im} f$ é mensurável, donde f é mensurável.

Definição 1 (partes positiva e negativa de uma função). Sejam $(X,\mathcal{A})$ espaço mensurável e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned} f^+ &\doteq \max\{f, 0\} \\ f^- &\doteq \max\{-f, 0\} = -\min\{f, 0\} \end{aligned}$$

Note que $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$, e que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável `see` f^+ e f^- o forem.

- Observação: Uma decomposição similar para $f : X \to \mathbb{C}$ é a *decomposição polar*, i.e. $f = (\mathrm{sgn} f) \cdot |f|$, onde $\mathrm{sgn} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é a função mensurável dada por

$$\mathrm{sgn}(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{|z|} & z \neq 0 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

Note que f é mensurável `see` $\mathrm{sgn}\, f$ e $|f|$ o forem.

II.1) Funções Simples.

Definição 2. Sejam X um conjunto e $A \subset X$

$$\begin{aligned} \chi_A &: X \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases} \end{aligned}$$

chama-se *indicatriz* ou *função característica* de A.

- Exercício: Se $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável e $A \subset X$, $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \chi_A$ mensurável.

Definição 3. Seja $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável. Uma função em X diz-se *simples* se for uma combinação linear finita, com coeficientes em $\mathbb{C}$, de funções características de mensuráveis (i.e., uma função da forma $\sum_{i=0}^{n} c_i \chi_{A_i}$, com $(A_i)_{0 \le i \le n} \prec \mathcal{A}$).

- Ideia: Dados $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida e $\phi = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{A_i}$ simples. Definiremos

$$\int \phi d\mu = \sum_{i=0}^{n} a_i \mu(A_i)$$

e, para $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável, definiremos $\int f d\mu$ aproximando f por funções simples.

Proposição 3. Sejam $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{C}$. Então, são equivalentes:

(i) f é simples.

(ii) f é mensurável e $\mathrm{Im} f$ é finita.

- Prova:
  - (i)$\Rightarrow$(ii) é claro.
  - (ii)$\Rightarrow$(i) Seja ϕ mensurável.

$$\mathrm{Im}\phi = \underbrace{\{c_0, c_1, ..., c_n\}}_{\text{2 a 2 distintos}}$$

Então

$$\phi = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} c_j \chi_{\phi^{-1}(\{c_j\})}}_{(*)}$$

$\therefore \phi$ é simples

Definição 4. Com a notação acima, $(*)$ chama-se *representação padrão* de ϕ.

Corolário 3. Se f, g simples e $\alpha \in \mathbb{C}$, então $f + g$, $f \cdot g$, αf também são simples.

Teorema 1 (Aproximação de funções mensuráveis por funções simples). Fixe $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável.

(a) Seja $f : X \to [0, \infty]$ mensurável. Existe $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência crescente de funções simples $X \to [0, \infty]$ tal que $\phi_n(x) \nearrow f(x)$, $\forall x \in X$. Além disso, se $A \subset X$ tal que Im $f|_A$ é limitada em $\mathbb{R}$, então $\phi_n|_A \xrightarrow{u} f|_A$.

(b) Seja $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável. Existe $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de funções simples $X \to \mathbb{C}$ tal que:

(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |\phi_n| \le |\phi_{n+1}| \le |f|$.

(ii) $\phi_n \xrightarrow{p.} f$ e, $\forall A \subset X$ tal que $f|_A$ limitado, $\phi_n|_A \xrightarrow{u.} f|_A$.

- Prova:

(a) Tome, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\phi_n &: X \to [0, \infty) \\
x &\mapsto \begin{cases} k2^{-n} & \text{se } k2^{-n} < f(x) \le (k+1)2^{-n} \text{ para } k \in \{0, ..., 2^{2n-1}\} \\ 2^n & \text{se } 2^n < f(x) \\ 0 & \text{se } f(x) = 0 \end{cases} \\
\text{i.e. } \phi_n &= \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k2^{-n} \chi_{\{k2^{-n} < f \le (k+1)2^{-n}\}} + 2^n \chi_{\{f > 2^n\}}
\end{aligned}$$

A sequência $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ assim definida cumpre as condições do enunciado, o que decorre dos seguintes fatos:

1) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le \phi_n \le \phi_{n+1} \le f$ (verifique!)

2) Se $x \in X$ é tal que $f(x) = \infty$, $\phi_n(x) = 2^n \to \infty = f(x)$

3) Se $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ são tais que $f(x) \leq 2^n$, tem-se $0 \leq f(x) - \phi_n(x) \leq 2^{-n}$ (verifique que isso implica $\phi_n(x) \to f(x)$ e a convergência é uniforme onde f é limitada, a valores em $\mathbb{R}$)

(b) Tome $\varphi^{\pm} = (\text{Re } f)^{\pm}$, $\psi^{\pm} = (\text{Im } f)^{\pm}$. Tome $(\varphi_n^{\pm})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\psi_n^{\pm})_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções simples: $X \to [0, \infty)$ obtidas aplicando-se (a) para $\varphi^{\pm}$ e $\psi^{\pm}$, respectivamente. Verifique que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $(\forall n)$

$$\phi_n = (\varphi_n^+ - \varphi_n^-) + i(\psi_n^+ - \psi_n^-)$$

satisfaz o enunciado em (b).

- Exercício: Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável, $f : X \to [0, \infty]$ mensurável, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec (0, \infty)$, $r_n \to 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} r_n = \infty$. Então, $\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n \chi_{A_n} = f$.