MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

http://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798
Notas da Aula 5 (28/3)

I) Medidas de Radon em $\mathbb{R}$.

Definição 1. Dado (X,τ) espaço topológico, uma *medida boreliana* em X é uma medida $\mu : \mathcal{B}_X \to [0,\infty]$.

- Queremos: Caracterizar as medidas borelianas em $\mathbb{R}$ finitas nos compactos de $\mathbb{R}$. Estas coincidem com as medidas de *Radon* em $\mathbb{R}$.
- Ideia: Seja $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ medida finita. Tome

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mu((-\infty,x]) \end{aligned}$$

- F é crescente e contínua à direita. Isso decorre da monotonicidade e da continuidade para baixo da medida.
- Partiremos de $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita e tentaremos obter uma medida boreliana a partir de F.

Definição 2. Seja $H \doteq \{(a,b] \cap \mathbb{R} | a,b \in \overline{\mathbb{R}} \text{ e } a \le b\}$. Os elementos de H chamam-se *h-intervalos*.

- Note que, se $a = b$, o intervalo é o conjunto vazio, logo $\emptyset \in H$. Além disso, H é uma semi-álgebra (em particular, é uma família elementar). Portanto, a álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}(H)$ gerada por H é dada por

$$\mathcal{A} = \left\{ \dot\bigcup_{i=0}^n J_i : n \in \mathbb{N},\, (J_i)_{0\le i\le n} \prec H \right\}$$

- Tome $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita. Definimos $F(+\infty) \doteq \lim_{n\to+\infty} F(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ e $F(-\infty) \doteq \lim_{n\to-\infty} F(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. Pomos:

$$\begin{aligned} \ell : H &\to [0,\infty] \\ (a,b] \cap \mathbb{R} &\mapsto F(b) - F(a) \end{aligned}$$

- Note que ℓ está bem definida, i.e. não ocorre $\infty - \infty$. Além disso, se F for a identidade, ℓ é igual a $b - a$, i.e. o comprimento do intervalo. Quero estender a ℓ a uma medida em $\mathcal{A}$, a qual será subsequentemente estendida a uma medida em $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ através do teorema de extensão de Carathéodory. Defina:

$$\begin{aligned} \mu_0 : \mathcal{A} &\to [0,\infty] \\ \dot\bigcup_{i=0}^n J_i &\mapsto \sum_{i=0}^n \ell(J_i) \end{aligned}$$

- Afirmação: μ_0 está bem definida e é finitamente aditiva.
  - Bem definida significa:

$$\dot{\bigcup}_{i=0}^n J_i = \dot{\bigcup}_{k=0}^m I_k \Rightarrow \sum_{i=0}^n \ell(J_i) = \sum_{k=0}^m \ell(I_k)$$

Lema 1. Se $J = (a,b] \cap \mathbb{R}$ h-intervalo e $\{J_i = (a_i,b_i] \cap \mathbb{R}\}_{0\le i\le n} \prec H$ forem tais que $J = \dot\bigcup_{i=0}^n J_i$, então

$$\underbrace{\ell(J)}_{=F(b)-F(a)} = \sum_{i=0}^n \underbrace{\ell(J_i)}_{=F(b_i)-F(a_i)}$$

- Prova: Existem $i_0, i_1, \cdots, i_n$ tais que

$$a = a_{i_0} < b_{i_0} = a_{i_1} < b_{i_1} = a_{i_2} < \cdots < b_{i_n} = b$$

Então,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \ell(J_i) &= \sum_{i=0}^n [F(b_i) - F(a_i)] = \sum_{j=0}^n [F(b_{i_j}) - F(a_{i_j})] = \\ &= F(b_{i_0}) - F(a_{i_0}) + F(b_{i_1}) - F(a_{i_1}) + \cdots + F(b_{i_n}) - F(a_{i_n}) = \\ &= F(\underbrace{b_{i_n}}_{=b}) - F(\underbrace{a_{i_0}}_{=a}) = \ell((a,b]) = \ell(J) \end{aligned}$$

- Prova da afirmação:

$$\sum_{i=0}^{n} \underbrace{\ell(J_i)}_{=\sum_{k=0}^{m}\ell(J_i\cap I_k)(*)} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\ell(J_i\cap I_k) = \sum_{k=0}^{m}\underbrace{\sum_{i=0}^{n}\ell(J_i\cap I_k)}_{=\ell(I_k)\text{ pelo lema}} = \sum_{k=0}^{n}\ell(I_k)$$

$$(*) \text{ pelo lema e } \forall i\in\{0,\cdots,n\},\ J_i = \dot{\bigcup}_{k=0}^{m} J_i\cap I_k$$

  – Para verificar μ_0 finitamente aditiva: tome $(J_k)_{0\le k\le n} \prec \mathcal{A}$. Para cada k,

$$J_k = \dot{\bigcup}_{i=0}^{n_k} \underbrace{I_i^k}_{\in H}$$

Então

$$\dot{\bigcup}_{k=0}^{m} J_k = \dot{\bigcup}_{k=0}^{m}\dot{\bigcup}_{i=0}^{n_k} I_i^k$$

$$\therefore\ \mu_0\left(\bigcup_{k=0}^{m} J_k\right) = \sum_{k=0}^{m}\underbrace{\sum_{i=0}^{n_k}\mu_0(I_i^k)}_{\mu_0(J_k)}$$

- Agora verifiquemos que μ_0 é σ-aditiva:

Lema 2. Sejam $J\in H$ e $(J_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec H|\cup_{n\in\mathbb{N}} J_n = J$. Então $\mu_0(J) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu_0(J_n)$.

Demonstração. 1. $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu_0(J_n) \le \mu_0(J)$. Com efeito, basta observar que a aditividade finita de μ_0 implica monotonicidade, daí, para todo $k\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{k}\mu_0(J_n) = \mu_0(\dot{\cup}_{n=0}^{k} J_n) \le \mu_0(J)$, donde a desigualdade afirmada (fazendo $k\to\infty$).

2. $\mu_0(J) \le \sum_{n\in\mathbb{N}}(J_n)$

   Caso 1: $J=(a,b]$ com $a<b$ reais. Para cada $n\in\mathbb{N}$ seja $J_n=(a_n,b_n]$ com $a_n<b_n$ reais. Dado $\varepsilon>0$:

   a) Escolha $\delta>0|F(a+\delta)-F(a)<\varepsilon$ (existe, pela continuidade à direita da F)

   b) Para cada $n\in\mathbb{N}$, escolha $\delta_n>0$ tal que

$$F(b_n+\delta_n)-F(b_n) < 2^{-(n+1)}\varepsilon$$

   de modo que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} F(b_n+\delta_n)-F(b_n) \le \varepsilon$$

   e portanto,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{[F(b_n+\delta_n)-F(a_n)]}_{=[F(b_n+\delta_n)-F(b_n)]+[F(b_n)-F(a_n)]} \le \sum_{n\in\mathbb{N}}[F(b_n)-F(a_n)]+\varepsilon$$

   Da cobertura aberta $\{(a_n,b_n+\delta_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ do compacto $[a+\delta,b]$ podemos extrair uma subcobertura finita, digamos, $\{(a_n,b_n+\delta_n)\}_{n\in\Lambda}$ onde $\Lambda\subset\mathbb{N}$ finito. Podemos, reduzindo Λ se necessário, assumir que, se $n\ne m$ em Λ, $(a_n,b_n+\delta_n)\nsubseteq(a_m,b_m+\delta_m)$ e que $\forall n\in\Lambda$, $(a_n,b_n+\delta)\cap[a+\delta,b]\ne\emptyset$. Além disso, podemos escolher uma enumeração $(n_1,...,n_k)$ de Λ, $k=\#\Lambda$, de modo que $\Lambda=\{n_j, 1\le j\le$

$k)\}$ e $\forall j \in \{1, ..., k-1\}$, $a_{n_{j+1}} \in (a_{n_j}, b_{n_j} + \delta_{n_j})$. Assim, temos:

$$F(b) - F(a) = [F(b) - F(a+\delta)] + \underbrace{[F(a+\delta) - F(a)]}_{<\varepsilon} \leq F(b) - F(a+\delta) + \varepsilon \leq$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ crescente}}}{\leq} \underbrace{F(b_{n_k} + \delta_{n_k}) - F(a_{n_1})}_{= F(b_{n_k} + \delta_{n_k}) - F(a_{n_k}) + \sum_{j=1}^{k-1} \underbrace{[F(a_{n_{j+1}}) - F(a_{n_j})]}_{\underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ crescente}}}{\leq} F(b_{n_j}+\delta_{n_j}) - F(a_{n_j})}} + \varepsilon \leq$$

$$\leq \underbrace{\sum_{j=1}^{k} [F(b_{n_j} + \delta_{n_j}) - F(a_{n_j})]}_{\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} [F(b_n + \delta_n) - F(a_n)]} + \varepsilon \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} [F(b_n) - F(a_n)] + 2\varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, segue-se $F(b) - F(a) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}[F(b_n) - F(a_n)]$. Como já provamos a outra desigualdade, segue "=".

<u>Caso 2</u>: $J = (-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$. Seja $(J_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec H | J = \cup_{n\in\mathbb{N}} J_n$. Já sabemos $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(J_n) \leq \mu_0(J)$. Por outro lado, tome $M \in \mathbb{R} < b$. Tem-se

$$(M, b] = \cup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(M, b] \cap J_n}_{\in H}$$

Pelo caso 1,segue

$$F(b) - F(M) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mu_0 \underbrace{(J_n \cap (M, b])}_{\subset J_n}}_{\leq \mu_0(J_n)} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(J_n)$$

Tomando $\lim_{M\to-\infty}$, conclui-se que

$$\underbrace{F(b) - F(-\infty)}_{=\mu_0(J)} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(J_n)$$

<u>Caso 3</u>: $J = (a, +\infty] \cap \mathbb{R}$ é análogo ao caso 2, tomando $M \in \mathbb{R} > a$ e olhando para $(a, M]$

<u>Caso 4</u>: $J = \mathbb{R} = (-\infty, \infty] \cap \mathbb{R}$. Tome $a \in \mathbb{R}$, de modo que $J = (-\infty, a] \dot\cup (a, +\infty)$, e aplique os casos 2 e 3 para cada um desses subintervalos. Fim da prova do lema.

$\square$

Prova da σ-aditividade de μ_0. Sejam $A \in \mathcal{A}(H)$ e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{A}(H)$ tais que $A = \dot\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. $\vdash \mu_0(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(A_n)$. Tome $(I_i)_{0\leq i\leq k} \prec\cdot\, H | A = \dot\cup_{i=0}^{k} I_i$. Como cada A_n é reunião finita disjunta de h-intervalos, podemos tomar $(J_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec H$ enumeração dos h-intervalos que aparecem na decomposição dos A_n's em reunião finita disjunta de h-intervalos (para cada n fixo escolhemos e fixamos tal decomposição). A aditividade finita de μ_0 implica:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(J_n)$$

Por outro lado:

$$\mu_0(A) = \sum_{i=0}^{k} \mu_0(I_i) \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{=} \sum_{i=0}^{k} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(I_i \cap J_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{k} \mu_0(I_i \cap J_n) \underset{\substack{\uparrow \\ (**)}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(J_n)$$

$$(*) \text{ por } \begin{cases} I_i = \dot\cup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{I_i \cap J_n}_{\in H} \\ + \text{ lema 2} \end{cases}$$

$$(**) \text{ por } \begin{cases} J_n = \dot\cup_{i=0}^{k} \underbrace{J_n \cap I_i}_{\in H} \\ + \mu_0 \text{ finitamente aditiva} \end{cases}$$

Conclusão:

$$\mu_0(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(J_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(A_n)$$

$\square$

Com isso, fica demonstrada a seguinte:

Proposição 1. Com a notação acima, μ_0 está bem definida e é uma medida na álgebra $\mathcal{A}$.

Pela proposição, $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ é uma medida na álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}(H)$ gerada por H. Pelo teorema de extensão de Carathéodory, existe, pois uma medida $\mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ que estende μ_0. Isso prova parte do seguinte:

Teorema 1 (caracterização das medidas de Radon em $\mathbb{R}$). Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita. Então:

(i) existe uma única medida boreliana μ_F tal que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, $\mu_F = F(b) - F(a)$. Além disso,

  a) μ_F é finita nos compactos

  b) Se $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita $\mu_F = \mu_G$ <u>see</u> $F - G$ constante.

(ii) Reciprocamente, se $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ medida finita nas compactos, existe $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita tal que $\mu = \mu_F$.

- <u>Prova</u>:

  (i) Já provamos a existência. Provaremos a unicidade: Seja $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ medida tal que <u>$\forall a, b \in \mathbb{R}$ com a, b, $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$</u> $(*)$. $\vdash \mu = \mu_F$ (sendo a μ_F construída ela proposição anterior mais o teorema de Carathéodory). Ora, para todo $J \in H$, $\mu_F(J) = \mu(J)$:

  $*$ Se J limitado, i.e. $J = (a,b]$ com $a < b$ reais, isso é claro, por $(*)$.

  $*$ Se J não limitado, podemos escrever $J = \dot\cup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ com $(\forall n) J_n \in H$ e J_n limitado

$$\therefore\ \mu(J) \underset{\mu \text{ medida}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(J_n) \underset{\text{por } (*)}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_F(J_n) \underset{\mu_F \text{ medida}}{\overset{\uparrow}{=}} \mu_F(J)$$

  Então, se $A \in \mathcal{A}(H)$, pondo $a = \dot\cup_{i=0}^{k} J_i$

$$\mu_F(A) = \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\mu_F(J_i)}_{\mu(J_i)} = \mu(A)$$

  Conclusão: $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_F|_{\mathcal{A}} = \mu_0$. Como μ_0 é σ-finita (pois $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{Z}}(n, n+1]$ e $\mu_0((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty$), a unicidade no teorema de extensão de Carathéodory garante $\mu = \mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$.

  $*$ É claro que μ_F é finita nos compactos: se $K \subset\subseteq \mathbb{R}$, $\exists a, b \in \mathbb{R} | K \subset (a,b] \therefore \mu_F(K) \le \mu_F((a,b]) < \infty$

  $*$ Finalmente, se $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua a direita:

  1. Se $\mu_F = \mu_G$, $\forall a, b \in \mathbb{R} | a < b$,

$$F(b) - F(b) = \mu_F((a,b]) = \mu_G((a,b]) = G(b) - G(a)$$

  $\therefore F - G$ é constante

  2. Se $F - G$ constante, então μ_F e μ_G coincidem em todo $J \in H$ com J limitado $\therefore \mu_F = \mu_G$

  (ii) Tome $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F \doteq \begin{cases} \mu((0,x]) & \text{se } x > 0 \\ -\mu((x,0]) & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

  Então, F está bem definida (pela finitude de μ dos compactos), F é crescente (pela monotonicidade de μ) e Fé contínua a direita (pela continuidade para baixo de μ, por exemplo, se $x > 0$ e $x_n \searrow x$, $F(x_n) = \mu((0,x_n]) \to \mu((0,x]) = F(x)$). Como μ e μ_F coincidem nos h-intervalos limitados, segue-se (de (i)) $\mu = \mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$.

- <u>Observação 1</u>: A mesma construção feita anteriormente pode ser reproduzida para h-intervalos da forma $[a,b) \cap \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à esquerda.

- Observação 2: Dada $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita, seja $\mu_0 : \mathcal{A}(H) \to [0, \infty]$ medida induzida por F conforme foi feito anteriormente. O teorema de extensão de Carathéodory fornece mais que uma medida boreliana $\mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$, fornece uma medida $\mu_F : \mathcal{M}_F \doteq \sigma(\mu^*) \to [0, \infty]$ a qual é o completamento de $\mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ (pois $\mu_0 : \mathcal{A}(H) \to [0, \infty]$ é σ-finita).

Definição 3. Com a notação acima, $\mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ ou $\mu_F : \mathcal{M}_F \to [0, \infty]$ chama-se *medida de Lebesgue-Stieltjes* induzida por F. Se $F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, μ_F chama-se *medida de Lebesgue*, e denota-se por m. $\mathcal{L} \doteq \mathcal{M}_F$ chama-se σ-álgebra de Lebesgue.

- Observação: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \underset{\neq}{\subsetneq} \mathcal{L} \underset{\neq}{\subsetneq} \mathbb{P}(\mathbb{R})$
- $\mathcal{L}$ é o completamento de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ com respeito a medida de Lebesgue.

`I.1) Propriedades de regularidade das medidas de Lebesgue-Stieltjes.` Sejam:

- $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita
- $\mu_0 : \mathcal{A}(H) \to [0, \infty]$ induzida por F (i.e., $\mu_0 = (\dot\cup_{i=0}^k I_i) = \sum_{i=0}^k \ell(I_i)$ onde $\ell(I_i) = F(b_i) - F(a_i)$ se $I_i = (a_i, b_i])$
- μ^* medida exterior induzida por μ_0, i.e.

$$\forall E \subset X,\, \mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_0(A_n) : (A_n) \prec \mathcal{A} \text{ com } E \subset \cup_n A_n \right\}$$

- $\mathcal{M}_F = \sigma(\mu^*)$

Proposição 2. Com a notação acima, tem-se

(i) $\forall E \subset X, \mu^*(E) = \inf\{\mu_F(\mathcal{U}) | E \subset \mathcal{U} \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}\}$.

(ii) $\forall E \in \mathcal{M}_F$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mathcal{U} \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{U} \supset E$ e $\mu(\mathcal{U}|E) < \varepsilon$.

(iii) $\forall E \in \mathcal{M}_F$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists G \subset E$ fechado tal que $\mu_F(E|G) < \varepsilon$.

(iv) $\forall E \in \mathcal{M}_F$, $\mu_F(E) = \sup\{\mu_F(K) : K \subset\subset \mathbb{R} \text{ e } K \subset E\}$.

Proposição 3. Com a notação acima, seja $A \subset \mathbb{R}$. São equivalentes:

(i) $A \in \mathcal{M}_F$.

(ii) $\exists \mathcal{U} \in G_\delta | \mathcal{U} \supset A$ e $\mu^*(\mathcal{U} \backslash A) = 0$.

(iii) $\exists F \in F_\delta | F \subset A$ e $\mu^*(A \backslash F) = 0$.

Proposição 4. Com a notação acima, seja $A \in \mathcal{M}_F$ com $\mu_F(A) < \infty$. Então, $\forall \varepsilon > 0$ existe $J \subset \mathbb{R} | J$ é união finita disjunta de intervalos abertos de medida μ_F finita e $\mu_F(A \Delta J) < \varepsilon$.