MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 4 (23/3)`

I) Construção de Medidas (continuação)

Definição 1. Seja $\mu^* : \mathbb{P}(X) \to [0, \infty]$ medida exterior. Digo que $A \subset X$ é μ^**-mensurável* se for cumprida a condição de Carathéodory:

$$\forall E \subset X,\, \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \qquad \text{(CA)}$$

Observação. Em vista da subaditividade enumerável de μ^*, (CA) é equivalente a: $\forall E \subset X | \mu^*(E) < \infty, \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$.

Teorema 1 (teorema de Carathéodory). Sejam X um conjunto, $\mu^* : \mathbb{P}(X) \to [0, \infty]$ medida exterior. Então:

(i) $\sigma(\mu^*) \doteq \{E \subset X | E\ \mu^*\text{-mensurável}\}$ é uma σ-álgebra e $\mu^*|_{\sigma(\mu^*)}$ é uma medida.

(ii) $\forall E \subset X | \mu^*(E) = 0$, tem-se $E \in \sigma(\mu^*)$. Em particular, $\mu^*|_{\sigma(\mu^*)}$ é completa.

Definição 2. $\mu^*|_{\sigma(\mu^*)}$ chama-se *medida induzida* por μ^*.

Teorema 2 (teorema de extensão de Carathéodory). Seja $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ medida numa álgebra $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$ e $\mu^* : \mathbb{P}(X) \to [0, \infty]$ induzida por μ_0. Então:

(a) $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$

(b) $\mathcal{A} \subset \sigma(\mu^*)$

(c) $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mu^*)$ e $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ é uma medida que estende μ_0. Além disso, se $\nu : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$ for outra medida que estende μ_0, $\nu \leq \mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$, i.e., $\forall E \in \sigma(\mathcal{A})$, $\nu(E) \leq \mu^*(E)$. Vale a igualdade se $\mu^*(E) < \infty$. Finalmente, se $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ for σ-finita (i.e. $\exists (A_n)_n \prec \mathcal{A}$ tal que $\cup_n A_n = X$ e $(\forall n)\ \mu_0(A_n) < \infty$), então $\nu = \mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ (em outras palavras, a extensão $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ é única).

- Pergunta: Com a notação acima, qual a relação entre $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})})$ (1) e $(X, \sigma(\mu^*), \mu^*|_{\sigma(\mu^*)})$ (2)?
- Resposta:
  - Se $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ for σ-finita, (2) é o completamento de (1).
  - No caso geral, (2) é o *saturamento* (vide definição no exercício 16 da lista 3) do completamento de (1).