MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798
Notas da Aula 3 (21/3)

I) Medidas (continuação)

Definição 1 (pushforward, restrição). Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida.

i) Dados $(Y, \mathcal{N})$ espaço mensurável e $\phi : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ aplicação mensurável, define-se $\phi_* \mu : \mathcal{N} \to [0, \infty]$ por $A \mapsto \mu\big(\phi^{-1}(A)\big)$. Então $\phi_* \mu$ é uma medida, chamada *pushforward* de μ por ϕ.

ii) Dado $Y \in \mathcal{M}$, o traço $\mathcal{M}|_Y$ é subconjunto de $\mathcal{M}$, de modo que faz sentido considerar a *restrição* $\mu|_Y : \mathcal{M}|_Y \to [0, \infty]$.

iii) Dado $Y \in \mathcal{M}$, definimos $(\forall A \in \mathcal{M}) \mu \llcorner Y(A) \doteq \mu(E \cap A)$. Então $\mu \llcorner Y : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ é uma medida, a qual coincide com o *pushforward* da restrição $\mu|_Y$ pela inclusão de Y em X.

Proposição 1 (propriedades das medidas). Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida. Tem-se:

(i) (monotonicidade) Se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subset B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$

(ii) (subaditividade enumerável) Dados $A \in \mathcal{A}$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec A$ com $A \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$,

$$\mu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

(iii) (continuidade para cima) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ crescente, então

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

(iv) (continuidade para baixo) Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ decrescente. Suponha que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_{n_0}) < \infty$. Então

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

Observação. Não vale (iv) sem a hipótese de que $(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ \mu(A_{n_0}) < \infty$: tome $(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}), \mu=$ medida de contagem) e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathbb{P}(N)$ dada por $A_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$. Tem-se: $(\forall n) \mu(A_n) = \infty \therefore \mu(A_n) \to \infty$, $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ e $\mu(\emptyset) = 0$.

Definição 2. Dado $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $N \subset X$ diz-se *nulo* se $\exists B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(B) = 0$ e $N \subset B$.

Definição 3 (espaço de medida completo). Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida. Diz-se que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é *completo* (ou que μ é *completa*) se todo nulo for mensurável, i.e. $N \subset X$ nulo implica $N \in \mathcal{A}$.

Proposição 2 (completamento de uma medida). Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida. Defina:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{Y \subset X : \exists A \in \mathcal{A}, \exists N \subset X \text{ nulo}, Y = A \cup N\}$$

Então $\tilde{\mathcal{A}}$ é uma σ-álgebra e μ admite uma única extensão a uma medida $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$. Além disso, $\tilde{\mu}$ é completa.

Definição 4. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida e $P(x)$ uma propriedade relativa aos pontos de X. Diz-se que P vale μ-quase sempre em X se $\{x \in X | \neg P(x)\}$ for um conjunto nulo (i.e. subconjunto de um mensurável de medida zero). Notação. P μ-q.s. .

Exemplo 1. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida.

1. Dadas $f, g : X \to \mathbb{C}$, "$f = g$ μ-q.s." significa $\{x \in X | f(x) \neq g(x)\}$ é nulo.
2. Dadas $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de funções e $f : X \to \mathbb{C}$, "$f_n \to f$ μ-q.s." significa $\{x \in X | f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$ é nulo $\Leftrightarrow \exists N \in \mathcal{A}$ com $\mu(N) = 0$ tal que $f_n \xrightarrow{p.} f$ em $X \backslash N$.

II) Construção de Carathéodory

DEFINIÇÃO 5. (medida exterior) Sejam X um conjunto e $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$. Diz-se que μ^* é uma *medida exterior* se:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) (subaditividade enumerável) se $A \subset X$ e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec 2^X$ tais que $A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, então $\mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$

Note que (i) e (ii) na definição acima implicam μ^* monótona.

PROPOSIÇÃO 3. Sejam X conjunto, $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$ tal que:

$$\begin{cases} \emptyset \in \mathcal{A} \\ \exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{A} | \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X \end{cases}$$

e $\rho : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tal que $\rho(\emptyset) = 0$. Então:

$$\begin{aligned} \mu^* : \mathbb{P}(X) &\to [0, \infty] \\ E &\mapsto \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(A_n) : (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec A \text{ e } E \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right\} \end{aligned}$$

é uma medida exterior.

DEFINIÇÃO 6. Com a notação da proposição acima, ρ chama-se *pré-medida exterior*.

Exemplo 2. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \doteq \{(a, b] \cap \mathbb{R} | a, b \in \overline{\mathbb{R}},\, a \leq b\}$, $\rho : \mathcal{A} \to [0, \infty]$

$$(a, b] \cap \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} b - a & \text{se } b < \infty \\ \infty & \text{se } b = \infty \end{cases}$$

DEFINIÇÃO 7 (mensurabilidade com respeito a uma medida exterior). Seja $\mu^* : \mathbb{P}(X) \to [0, \infty]$ medida exterior. Digo que $A \subset X$ é μ^*-*mensurável* se for cumprida a condição de Carathéodory:

$$\forall E \subset X,\, \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \qquad \text{(CA)}$$

- Ideia: Suponha que $\mu^*(X) < \infty$. Tomando $E = X$ na condição acima obtém-se:

$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c) \Leftrightarrow \underbrace{\mu^*(X) - \mu^*(A^c)}_{\text{medida interior de } A} = \underbrace{\mu^*(A)}_{\text{medida exterior de } A}$$

TEOREMA 1 (teorema de Carathéodory). Sejam X um conjunto, $\mu^* : \mathbb{P}(X) \to [0, \infty]$ medida exterior. Então:

(i) Seja $\sigma(\mu^*) \doteq \{E \subset X | E\ \mu^*\text{-mensurável}\}$. Então $\sigma(\mu^*)$ é uma σ-álgebra e $\mu^*|_{\sigma(\mu^*)}$ é uma medida.

(ii) $\forall E \subset X | \mu^*(E) = 0$, tem-se $E \in \sigma(\mu^*)$.

Em particular, $\mu^*|_{\sigma(\mu^*)}$ é completo.

DEFINIÇÃO 8. $\mu^*|_{\sigma(\mu^*)}$ chama-se *medida induzida* por μ^*.