MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 24 (6/6)`

I) O Dual de $\mathsf{L^p}$. Fixaremos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ até o final desta seção.

Sejam $p, q \in [1, \infty]$ expoentes conjugados e $g \in \mathsf{L^p}$. Então, pela desigualdade de Hölder, fica bem definido um funcional linear contínuo $\phi_g : \mathsf{L^q} \to \mathbb{C}$ dado por $f \mapsto \int fg \, d\mu$, tal que $\|\phi_g\| \leq \|g\|_p$. A proposição abaixo afirma que, em quase todas as situações, $\|\phi_g\| = \|g\|_p$, de modo que $g \mapsto \phi_g$ define uma isometria linear $\phi : \mathsf{L^p} \to \mathsf{L^q}^*$.

Proposição 1. Com a notação acima, se $1 \leq p < \infty$, ou se $p = \infty$ e μ semifinita, $\phi : \mathsf{L^p} \to \mathsf{L^q}^*$ é uma isometria linear.

Demonstração. Só precisamos verificar que, $\forall g \in \mathsf{L^p}$, $\|\phi_g\| \geq \|g\|_p$, pois a outra desigualdade segue por Hölder e a linearidade é clara. Se $\|g\|_p = 0$, não há o que fazer; suponha, pois, $\|g\|_p > 0$.

1. Se $1 < p < \infty$, tome $f \doteq \overline{\operatorname{sgn} g} \cdot \frac{|g|^{p-1}}{\|g\|_p^{p-1}}$. Então $\|f\|_q = 1$ e $\phi_g(f) = \int fg \, d\mu = \|g\|_p$, de modo que $\|\phi_g\| \geq \|g\|_p$, como afirmado.
2. Se $p = 1$ e $q = \infty$, tome $f \doteq \overline{\operatorname{sgn} g}$. Então $\|f\|_\infty = 1$ (pois $g > 0$ num conjunto de medida > 0) e $\phi_g(f) = \int fg \, d\mu = \|g\|_1$, donde $\|\phi_g\| \geq \|g\|_1$, como afirmado.
3. Se $p = \infty$ e μ semifinita. Nesse caso, $q = 1$ e, dado $\epsilon > 0$, como $\|g\|_\infty$ é o supremo essencial de g, podemos tomar $E \in \mathcal{M}$ com $\mu(E) > 0$ tal que $|g| > \|g\|_\infty - \epsilon$ em E. E, pela semifinitude de μ, podemos supor $\mu(E) < \infty$. Tome $f \doteq \overline{\operatorname{sgn} g} \cdot \frac{\chi_E}{\mu(E)}$. Então $\|f\|_1 = 1$ (pois $|\operatorname{sgn} g| = 1$ em E para $\|g\|_\infty - \epsilon > 0$) e $\phi_g(f) = \int fg \, d\mu \geq \|g\|_\infty - \epsilon$. Pela arbitrariedade do $\epsilon > 0$ tomado, isso implica $\|\phi_g\| \geq \|g\|_\infty$, como afirmado.

$\square$

Reciprocamente, em quase todas as situações, se g é uma função mensurável tal que $f \mapsto \int fg \, d\mu$ define um funcional linear contínuo em $\mathsf{L^q}$, então $g \in \mathsf{L^p}$.

Teorema 1 (recíproca da desigualdade de Hölder). Sejam $p, q \in [1, \infty]$ expoentes conjungados e g uma função mensurável tal que fg seja integrável para toda função $f \in \mathsf{L^q}(\mu)$ e tal que:

$$M_p(g) \doteq \sup\{|\int fg| : f \in \mathsf{L^q}(\mu), \|f\|_q \leq 1\} < \infty \tag{1}$$

Suponha também que $S_g \doteq \{g \neq 0\}$ seja σ-finito ou que μ seja semifinita. Então $g \in \mathsf{L^p}$ e $\|g\|_p = M_p(g)$.

Provaremos o enunciado abaixo, que claramente implica o anterior.

Teorema 2 (recíproca da desigualdade de Hölder, v.2). Sejam $p, q \in [1, \infty]$ expoentes conjungados e g uma função mensurável tal que fg seja integrável para toda função $f \in \Sigma \doteq \{$funções simples integráveis$\}$ e tal que:

$$M_p(g) \doteq \sup\{|\int fg| : f \in \Sigma, \|f\|_q \leq 1\} < \infty \tag{2}$$

Suponha também que $S_g \doteq \{g \neq 0\}$ seja σ-finito ou que μ seja semifinita. Então $g \in \mathsf{L^p}$ e $\|g\|_p = M_p(g)$.

Demonstração. 1) Notemos, inicialmente, que, se f for uma função mensurável e limitada que se anule no complementar de um mensurável E de medida finita e $\|f\|_q \leq 1$, então $|\int fg \, d\mu| \leq M_p(g)$. Com efeito, existe uma sequência de funções simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_n \xrightarrow{p} f$ e $(\forall n)|f_n| \leq |f_{n+1}| \leq |f| \leq \|f\|_\infty \chi_E$. Como f é integrável, $(f_n)_n$ é uma sequência em Σ e $(\forall n)\|f_n\|_q \leq \|f\|_q \leq 1$, logo $(\forall n)|\int f_n g \, d\mu| \leq M_p(g)$. Além disso, $f_n g \xrightarrow{p} fg$ e $(\forall n)|f_n g| \leq \|f\|_\infty \chi_E g \in \mathsf{L^1}$, de modo que o TCD se aplica e conclui-se que $|\int f_n g \, d\mu| \to |\int fg \, d\mu|$.

2) Suponha $p < \infty$, de modo que $q > 1$. Podemos assumir S_g σ-finito, em vista do lema abaixo:

Lema 1. Se $p < \infty$, $M_p(g) < \infty$ e μ semifinita, então S_g é σ-finito.

Prova do Lema: Dado $\epsilon > 0$, seja $S_\epsilon \doteq \{|g| > \epsilon\}$. Basta verificar que $\mu(S_\epsilon) < \infty$. Supondo $\mu(S_\epsilon) = \infty$, para todo $c > 0$ existe, pela semifinitude de μ, $E \in \mathcal{M}$ tal que $E \subset S_\epsilon$ e $c < \mu(E) < \infty$. Portanto, se $q < \infty$, $f \doteq \frac{\overline{\operatorname{sgn} g}}{\|\chi_E\|_q} \chi_E$ é mensurável, limitada, se anula no complementar do mensurável E de medida finita e $\|f\|_q \leq 1$. Como $|\int fg \, d\mu| = \frac{1}{\|\chi_E\|_q} \int_E |g| \, d\mu > \epsilon \mu(E)^{1-1/q} > \epsilon c^{1/p}$, segue-se do item anterior que $M_p(g) \geq \epsilon c^{1/p}$. Fazendo $c \to \infty$, obtém-se $M_p(g) = \infty$, chegando-se a uma contradição. Por outro lado, se $q = \infty$, tome $f \doteq \overline{\operatorname{sgn} g} \chi_E$, a qual é mensurável, limitada, se anula no complementar de E e $\|f\|_\infty \leq 1$. Então $|\int fg \, d\mu| = \int_E |g| > c\epsilon$, donde $M_p(g) \geq c\epsilon$, o que implica, como no caso anterior, $M_p(g) = \infty$. $\square$

Podemos assumir $\mu(S_g) > 0$, caso contrário $g = 0$ μ-q.s. e a tese é trivial. Tome, pois, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ sequência crescente de mensuráveis de medida finita e estritamente positiva tal que $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = S_g$. Tome, além disso, $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções simples tal que $(\forall n)|\phi_n| \leq |\phi_{n+1}| \leq |g|$ e $\phi_n \xrightarrow{p.} g$, e defina $(\forall n) g_n \doteq \chi_{E_n} \cdot \phi_n$. Então $(\forall n)|g_n| \leq |g|$, $g_n \xrightarrow{p.} g$, $(\forall n) g_n$ é simples e se anula no complementar de E_n, logo $\|g_n\|_p < \infty$. Finalmente, defina:

$$f_n \doteq \frac{\overline{\operatorname{sgn} g}|g_n|^{p-1}}{\|g_n\|_p^{p-1}}$$

Note que, como $\mu(S_g) > 0$, $\|g\|_p > 0$. E, como $g_n \xrightarrow{p.} g$, segue-se do lema de Fatou que $0 < \|g\|_p \leq \liminf \|g_n\|_p$, de modo que podemos assumir, descartando-se os termos iniciais da sequência, se necessário, que $\|g_n\|_p > 0$, garantindo-se que f_n está bem definida. Além disso, $(\forall n \in \mathbb{N}) f_n$ é mensurável, se anula no complementar do mensurável de medida finita E_n e é limitada (pois $|g_n|$ é limitada, por ser uma função simples). Além disso, $(\forall n)\|f_n\|_q \leq 1$, daí a conclusão do item anterior se aplica e justifica a última das desigualdades abaixo:

$$\begin{aligned} \|g\|_p \leq \liminf \underbrace{\|g_n\|_p}_{=\int |f_n g_n| \,\mathrm{d}\mu} &= \liminf \int |f_n g_n| \,\mathrm{d}\mu \leq \\ \leq \liminf \int |f_n g| \,\mathrm{d}\mu &= \liminf \int f_n g \,\mathrm{d}\mu \leq M_p(g) \end{aligned} \tag{3}$$

Então $\|g\|_p \leq M_p(g)$; e, por Hölder, $M_p(g) \leq \|g\|_p$. Logo, $\|g\|_q = M_p(g) < \infty$, como afirmado, concluindo-se o argumento para o caso $p < \infty$.

3) Caso $p = \infty$, $q = 1$. Dado $\epsilon > 0$, seja $A \doteq \{x \in X : |g(x)| \geq M_p(g) + \epsilon\}$. Mostremos que $\mu(A) = 0$, o que acarretará, pela arbitrariedade do ϵ tomado, $\|g\|_\infty \leq M_p(g)$. Com efeito, suponha $\mu(A) > 0$. Então, seja pela semifinitude de μ ou pelo fato de $A \subset S_g$, existe $E \subset A$ mensurável tal que $0 < \mu(E) < \infty$. Defina $f \doteq \frac{\overline{\operatorname{sgn} g}\chi_E}{\mu(E)}$. Então f é mensurável, limitada, se anula no complementar do mensurável E de medida finita e $\|f\|_1 \leq 1$. Portanto, pela parte 1) do argumento, tem-se $M_p(g) \geq |\int fg \,\mathrm{d}\mu| = \frac{1}{\mu(E)} \int_E |g| \,\mathrm{d}\mu \geq M_p(g) + \epsilon$, chegando-se a uma contradição.

   Então $\|g\|_\infty \leq M_p(g)$, e a outra desigualdade segue por Hölder, logo $\|g\|_\infty = M_p(g) < \infty$, como afirmado.

□

Finalmente, provaremos a seguir que, se $p < \infty$, em quase todas as situações, a isometria linear $\phi : \mathsf{L^p} \to \mathsf{L^q}^*$ definida acima é sobrejetiva, de modo a identificar $\mathsf{L^q}^* \equiv \mathsf{L^p}$.

Teorema 3 (teorema de representação de Riez para o dual de $\mathsf{L^p}$). Sejam $p \in (1, \infty]$ e q o expoente conjugado de p (de modo que $q \in [1, \infty)$). Se $q > 1$, ou se $q = 1$ e μ σ-finita, $\phi : \mathsf{L^p} \to \mathsf{L^q}^*$ é uma isometria linear sobrejetiva.

Demonstração. 1) Já sabemos que $\phi : \mathsf{L^p} \to \mathsf{L^q}^*$ é uma isometria linear. Resta provar que é sobrejetiva.

2) Suponha μ finita. Nesse caso, $\forall E \in \mathcal{M}$, $\chi_E \in \mathsf{L^q}$.

   Seja $\phi \in \mathsf{L^q}^*$. Defina $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ por $E \mapsto \phi(\chi_E)$.

   i) ν é uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$. Com efeito, é claro que $\nu(\emptyset) = 0$ e que ν é finitamente aditiva, pela linearidade de ϕ; verifiquemos que ν é σ-aditiva. De fato, se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$, $E = \dot\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, então:

   $$\|\chi_E - \sum_{k=1}^n \chi_{E_k}\|_q = \mu(\dot{\bigcup_{k=n+1}^{\infty}} E_k)^{1/q} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

   pelo fato de ser $q < \infty$ e pela continuidade para baixo da medida aplicada à sequência decrescente $\{\dot\cup_{k=n+1}^\infty E_k\}_{n\in\mathbb{N}}$, cuja intersecção é vazia. Portanto, como ϕ é contínua em $\mathsf{L^q}$:

   $$\nu(E) = \phi(\chi_E) = \lim_{n\to\infty} \phi(\sum_{k=1}^n \chi_{E_k}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \phi(\chi_{E_k}) = \sum_{k=1}^\infty \nu(\chi_{E_k})$$

   e a série no segundo membro é comutativamente convergente (pois qualquer reordenação da sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ terá união E e o mesmo argumento se aplica a uma tal reordenação), logo absolutamente convergente, i.e. somável.

   ii) $\nu \ll \mu$. Com efeito, se $E \in \mathcal{M}$ e $\mu(E) = 0$, então χ_E é nula quase sempre, i.e. nula como elemento de $\mathsf{L^q}(\mu)$. Portanto, $\nu(E) = \phi(\chi_E) = 0$.

iii) Pelo teorema de Radon-Nikodym, existe, pois, $g \in \mathsf{L}^1(\mu)$ tal que $\nu = g\,\mathrm{d}\mu$. Note que, como μ é finita, toda função simples $X \to \mathbb{C}$ está em $\mathsf{L}^\infty \cap \mathsf{L}^1$. Como funcionais lineares no espaço $\Sigma \doteq \{$funções simples $X \to \mathbb{C}\}$, ϕ e $g\,\mathrm{d}\mu$ coincidem num conjunto de geradores, a saber, nas funções características; então coincidem em Σ. Portanto, para toda $f \in \Sigma$, $fg \in \mathsf{L}^1(\mu)$ e:

$$|\int fg\,\mathrm{d}\mu| = |\phi(f)| \leq \|\phi\|\|f\|_q,$$

o que implica, pela recíproca da desigualdade de Hölder, $g \in \mathsf{L}^\mathsf{p}$ e $\|g\|_p \leq \|\phi\|$.

Finalmente, $\phi_g \in \mathsf{L}^{\mathsf{q}*}$ e $\phi \in \mathsf{L}^{\mathsf{q}*}$ coincidem no subespaço denso Σ de L^q; então $\phi_g = \phi$, o que conclui a prova da sobrejetividade no caso μ finita.

3) Suponha μ σ-finita. Tome $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $X = \dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ e $(\forall n \in \mathbb{N})\mu(E_n) < \infty$. Seja $\phi \in \mathsf{L}^\mathsf{q}(\mu)^*$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a medida finita $\mu_n \doteq \mu \llcorner E_n$ em $(X, \mathcal{M})$; a aplicação $f \mapsto f \cdot \chi_{E_n}$ define uma isometria linear $\mathsf{L}^\mathsf{q}(\mu_n) \to \mathsf{L}^\mathsf{q}(\mu)$ (pois, para toda $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável, $\int |f\chi_{E_n}|^p\,\mathrm{d}\mu = \int |f|^p \chi_{E_n}\,\mathrm{d}\mu = \int |f|^p\,\mathrm{d}\mu_{E_n}$). A composta de ϕ com esta isometria define um funcional linear contínuo $\phi_n \in \mathsf{L}^\mathsf{q}(\mu_n)^*$, com $\|\phi_n\| \leq \|\phi\|$; pelo item anterior, existe $g_n \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu_n)$ que representa ϕ_n, i.e. $\phi_n : f \mapsto \int fg\,\mathrm{d}\mu_n$. Podemos supor, modificando g_n num conjunto μ_n-nulo, se necessário, que g_n se anula no complementar de E_n. Assim sendo, $g_n \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu)$ e $\|g_n\|_{\mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu)} = \|g_n\|_{\mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu_n)} = \|\phi_n\| \leq \|\phi\|$.

Defina a função mensurável $g : X \to \mathbb{C}$ por $G \doteq \sum_{n=1}^\infty g_n$. Verifiquemos que $G \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu)$ e G representa ϕ. De fato:

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $G_n \doteq \sum_{k=1}^n g_k \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu)$ e, $\forall f \in \mathsf{L}^\mathsf{q}(\mu)$, $|\int fG_n\,\mathrm{d}\mu| = |\sum_{k=1}^n \int \chi_{E_k} \cdot fg_k\,\mathrm{d}\mu_n| = |\sum_{k=1}^n \phi_k(\chi_{E_k} \cdot f)| = |\sum_{k=1}^n \phi(\chi_{E_k} \cdot f)| = |\phi(\sum_{k=1}^n \chi_{E_k} \cdot f)| = |\phi(\chi_{\dot\bigcup_{k=1}^n E_k} \cdot f)| \leq \|\phi\|\|\chi_{\dot\bigcup_{k=1}^n E_k} \cdot f\|_q \leq \|\phi\|\|f\|_q$. Portanto, pela recíproca da desigualdade de Hölder, conclui-se que $G_n \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu)$ e $\|G_n\|_p \leq \|\phi\|$. Como $|G_n| \nearrow |G|$, segue-se (pelo lema de Fatou se $p < \infty$, pelo lema ao final da demonstração se $p = \infty$) que:

$$\|G\|_p \leq \liminf \|G_n\|_p \leq \|\phi\|$$

logo, $G \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu)$ e $\|G\|_p \leq \|\phi\|$.

ii) Dada $F \in \mathsf{L}^\mathsf{q}(\mu)$, defina $(\forall n \in \mathbb{N}) f_n \doteq F \cdot \chi_{E_n}$. Então $F_n \doteq \sum_{k=1}^n f_k \xrightarrow{\mathsf{L}^\mathsf{q}} F$, pois $|F - F_n|^q$ converge pontualmente para zero e $|F - F_n|^q \leq |F|^q \in \mathsf{L}^1$, de modo que o teorema da convergência dominada se aplica. Portanto, $\phi(F_n) \to \phi(F)$. Por outro lado, $F_nG \xrightarrow{p.} FG$ e $|F_nG| \leq |FG|$, sendo $FG \in \mathsf{L}^1$, por Hölder. Daí, usando uma vez mais o teorema da convergência dominada:

$$\int FG\,\mathrm{d}\mu = \lim \underbrace{\int F_nG\,\mathrm{d}\mu}_{=\int F_nG_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^n \int f_n g_n\,\mathrm{d}\mu_n} = \lim \sum_{k=1}^n \phi(f_n) = \lim \phi(F_n) = \phi(F)$$

o que implica $\phi = \phi_G$.

4) Suponha μ medida positiva qualquer e $1 < q < \infty$, de modo que $1 < p < \infty$. Seja $\phi \in \mathsf{L}^\mathsf{q}(\mu)^*$. Para cada $F \in \mathcal{M}$ σ-finito, podemos considerar a medida σ-finita $\mu_F \doteq \mu \llcorner F$ e identificar $\mathsf{L}^\mathsf{q}(\mu_F)$ com um subespaço fechado de $\mathsf{L}^\mathsf{q}(\mu)$, dado pela imagem da isometria $f \in \mathsf{L}^\mathsf{q}(\mu_F) \mapsto f \cdot \chi_F \in \mathsf{L}^\mathsf{q}(\mu)$. A restrição de ϕ a este subespaço é um elemento de $\mathsf{L}^\mathsf{q}(\mu_F)^*$, o qual se representa, pelo item anterior, por uma função $g_F \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu_F) \subset \mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu)$ com $\|g_F\|_p \leq \|\phi\|$. Note que, se $E \subset F$ mensuráveis e σ-finitos, então $\chi_E \cdot g_F$ também representa a restrição de ϕ a $\mathsf{L}^\mathsf{q}(\mu_E)$, de modo que g_F coincide com g_E μ-q.s. em E.

Defina $\Sigma \doteq \{F \in \mathcal{M} | F\ \sigma\text{-finito}\}$ e $M \doteq \sup\{\|g_F\|_p : F \in \Sigma\} \leq \|\phi\|$. Afirmo que M é um máximo, i.e. existe $F \in \Sigma$ tal que $\|g_F\|_p = M$. Com efeito, basta tomar uma sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \Sigma$ tal que $\|g_{F_n}\|_p \to M$ e tomar $F \doteq \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Então $F \in \mathcal{M}$ é σ-finito, i.e. $F \in \Sigma$, e, como observado acima, $(\forall n \in \mathbb{N}) g_F$ coincide com g_{F_n} μ-q.s. em F_n, o que implica $(\forall n \in \mathbb{N})\|g_{F_n}\|_p \leq \|g_F\|_p$, donde $M = \lim \|g_{F_n}\|_p \leq \|g_F\|_p \leq M$, portanto $\|g_F\|_p = M$, como afirmado. Afirmo que $g \doteq g_F \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu)$ representa ϕ. Com efeito:

i) Se $A \in \mathcal{M}$ for σ-finito e $F \subset A$, então $g_A = g_F$ μ-q.s., pois:

$$M^p \geq \int |g_A|^p\,\mathrm{d}\mu = \int_F |g_A|^p\,\mathrm{d}\mu + \int_{A\setminus F} |g_A|^p\,\mathrm{d}\mu = \int |g_F|^p\,\mathrm{d}\mu + \int_{A\setminus F} |g_A|^p\,\mathrm{d}\mu = M^p + \int_{A\setminus F} |g_A|^p\,\mathrm{d}\mu$$

o que implica $\int_{A\setminus F} |g_A|^p\,\mathrm{d}\mu = 0$, logo $g_A = 0$ quase sempre em $A \setminus F$, i.e. $g_A = g_F$ quase sempre, como afirmado.

ii) Dada $f \in \mathsf{L}^{\mathsf{q}}(\mu)$, $\{f > 0\}$ é σ-finito; tome $A \doteq \{f > 0\} \cup F$, de modo que A é σ-finito, $A \supset F$ e $f = f \cdot \chi_A \in \mathsf{L}^{\mathsf{q}}(\mu_A)$. Então, pelo item anterior, $g_A = g_F$ quase sempre, o que permite concluir que:

$$\phi(f) = \int f g_A \,\mathrm{d}\mu = \int f g_F \,\mathrm{d}\mu$$

i.e. $g = g_F \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mu)$ representa ϕ, como afirmado.

Note que a hipótese $p < \infty$ foi usada na última parte do argumento para garantir $g_A = g_F$ μ-q.s. se $A \supset F$ mensurável e σ-finito.

□

Lema 2 (Fatou para L^∞). Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em L^+ e $f \doteq \liminf f_n$. Então $\|f\|_\infty \leq \liminf \|f_n\|_\infty$.

Demonstração. Seja $c < \|f\|_\infty$. Então $\{f > c\}$ tem medida estritamente positiva, e $\{f > c\} \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{k\geq n} \{f_k > c\}$. Portanto, pela subaditividade enumerável de μ, conclui-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\cap_{k\geq n_0}\{f_k > c\}$ tem medida estritamente positiva, donde $(\forall k \geq n_0)\|f_k\|_\infty > c$. Pela arbitrariedade do $c < \|f\|_\infty$ tomado, isso implica $\|f\|_\infty \leq \liminf \|f_n\|_\infty$. □

Corolário 1. Se $1 < p < \infty$, $\mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mu)$ é um espaço de Banach reflexivo.

I.1) Algumas desigualdades úteis.

Proposição 2 (desigualdade de Chebyshev). Sejam $0 < p < \infty$, $f \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mu)$ e $\alpha > 0$. Então $\mu(\{|f| > \alpha\}) \leq \left[\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right]^p$.

Teorema 4 (desigualdade de Minkowski integral). Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos e f uma função $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-mensurável em $X \times Y$.

a) Se $f \in \mathsf{L}^+$ e $1 \leq p < \infty$,

$$\left[\int \Big(\int f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)^p \mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/p} \leq \int \left[\int f(x,y)^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/p} \mathrm{d}\nu(y) \tag{4}$$

b) Se $p \in [1, \infty]$, vale a desigualdade abaixo, desde que o segundo membro faça sentido e seja finito (i.e. se para ν-q.t. $y \in Y$ $f(\cdot, y) \in \mathsf{L}^{\mathsf{p}}(\mu)$ e a função mensurável definida quase sempre $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p$ for ν-integrável, então, para μ-q.t. $x \in X$ $f(x, \cdot)$ é ν-integrável, a função definida quase sempre $x \mapsto \int f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ está em L^{p} e vale a desigualdade):

$$\|\int f(\cdot, y)\,\mathrm{d}\nu(y)\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p\,\mathrm{d}\nu(y) \tag{5}$$

Demonstração. a) Se $p = 1$, vale a igualdade pelo teorema de Tonelli. Suponha $1 < p < \infty$ e que o segundo membro da desigualdade seja finito (caso contrário a tese é trivial); tome q o expoente conjugado de p. Para toda $g \in \mathsf{L}^{\mathsf{q}}(\mu)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int \Big(\int f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)|g(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) &= \int\int f(x,y)|g(x)|\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{Tonelli}}{=} \\
&= \int\int f(x,y)|g(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y) \overset{\text{Hölder}}{\leq} \\
&\leq \int \left[\int f(x,y)^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/p} \|g\|_q\,\mathrm{d}\nu(y) = \Big(\int \left[\int f(x,y)^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/p} \mathrm{d}\nu(y)\Big)\|g\|_q
\end{aligned}$$

Portanto, pela recíproca da desigualdade de Hölder, conclui-se que $\|\int f(\cdot, y)\,\mathrm{d}\nu(y)\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p\,\mathrm{d}\nu(y)$, como afirmado.

b) Se $p = \infty$, a desigualdade é imediata a partir da monotonicidade da integral. Se $1 \leq p < \infty$, basta aplicar o item anterior para $|f|$.

□