MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

http://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798
Notas da Aula 23 (1/6)

I) Espaços L^p

DEFINIÇÃO 1. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $p \in (0, \infty)$. Dada $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável, definimos:

$$\|f\|_p \doteq \left[\int |f|^p d\mu\right]^{1/p} \in [0, \infty]$$
$$\mathcal{L}^p(\mu) \doteq \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) \doteq \{f : X \to \mathbb{C} \text{ mensurável} : \|f\|_p < \infty\}$$

Exercício:
Com a notação acima, $\mathcal{L}^p(\mu)$ é um $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $\mathbb{C}^X$.

LEMA 1. Sejam $a, b \geq 0$, $\lambda \in (0, 1)$. Então, $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda)b$

Demonstração. Se $a = 0$ ou $b = 0$, a desigualdade é trivial. Suponha que $a > 0$ e $b > 0$. Tome $A, B \in \mathbb{R}$ tais que $a = e^A$, $b = e^B$

$$\therefore\ a^\lambda \cdot b^{1-\lambda} = (e^A)^\lambda \cdot (e^B)^{1-\lambda} = \exp(\lambda A + (1 - \lambda)B) \overset{\text{exp é convexa}}{\leq} \lambda e^A + (1 - \lambda)e^B = \lambda a + (1 - \lambda)b$$

□

DEFINIÇÃO 2. Seja $p \in (1, \infty)$, existe um único $q \in (1, \infty)$ tal que $(1/p) + (1/q) \overset{(*)}{=} 1$, a saber $q = p/(p - 1)$. Chamamos o q de *expoente conjugado* de p. Pela simetria da condição $(*)$, q é expoente conjugado de p `see` p é expoente conjugado de q; diz-se que p e q são conjugados.

TEOREMA 1 (Desigualdade de Hölder). Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $f, g : X \to \mathbb{C}$ mensuráveis e $p, q \in (1, \infty)$ expoentes conjugados. Então,

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Demonstração.

1. Se $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ a desigualdade é trivial.
2. Se $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$ e uma delas for ∞, a desigualdade é trivial.
3. Suponha que $0 < \|f\|_p < \infty$ e $0 < \|g\|_q < \infty$

$$\begin{aligned}
\frac{\int |fg| d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} &= \int \frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} d\mu = \\
&= \int \underbrace{\left[\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}\right]^{1/p} \cdot \left[\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\right]^{1/q}}_{\overset{\text{lema}}{\leq} \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}} d\mu \leq \\
&\leq \frac{1}{p}\frac{1}{\|f\|_p^p} \underbrace{\int |f|^p d\mu}_{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{1}{\|g\|_q^q} \int |g|^q d\mu = \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
&\therefore\ \int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q
\end{aligned}$$

□

COROLÁRIO 1. Com a hipótese do teorema acima, se $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$, então $f \cdot g \in \mathcal{L}^1$.

Exercício: a) (desigualdade de Young) Sejam $a_1, \ldots, a_N \geq 0$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_N > 0$ tais que $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$. Então:

$$\prod_{i=1}^N a_i \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i^{\frac{1}{\lambda_i}}$$

SUGESTÃO: Use a convexidade da exponencial, como anteriormente.

b) (desigualdade de Hölder generalizada) Sejam $r, p_1, \ldots, p_N \in (0, \infty)$ tais que $\dfrac{1}{r} = \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}$. Então, se $f_1, \ldots, f_N$ mensuráveis:

$$\|\prod_{i=1}^N f_i\|_r \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{p_i}$$

SUGESTÃO: Use a desigualdade de Young com $a_i = \frac{|f_i|^r}{\|f_i\|_{p_i}^r}$ e $\lambda_i = \frac{r}{p_i}$, $1 \leq i \leq N$.

TEOREMA 2 (desigualdade de Minkowski). Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $f, g : X \to \mathbb{C}$ mensuráveis e $p \in [1, \infty)$. Então,

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demonstração. 1. A desigualdade é trivial se $\|f\|_p = \infty$ ou $\|g\|_p = \infty$ ou se $|f + g| = 0$ μ-q.s. (nesse caso $\|f + g\|_p = [\int |f + g|^p]^{1/p} = 0\, \mathrm{d}\mu$).

2. Suponha $\|f\|_p < \infty$, $\|g\|_p < \infty$ e $|f + g| > 0$ num mensurável de medida positiva.

   2.1) O caso $p = 1$ decorre imediatamente da desigualdade triangular e da monotonicidade da integral, conforme já verificamos anteriormente.

   2.2) Seja $p > 1$ e q o exponente conjugado de p. Tem-se:

$$\begin{aligned}
\int |f+g|^p d\mu &= \int \underbrace{|f+g|}_{\leq |f|+|g|} \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \leq \\
&\leq \int |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu + \int |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \leq \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \cdot \||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q = \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \underbrace{\left[\int |f+g|^{\overbrace{(p-1)q}^{\overset{(**)}{=} p}}\right]^{1/q}}_{>0}
\end{aligned}$$

$$(**) \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1} \Leftrightarrow p = q(p-1)$$

$$\therefore \underbrace{\int |f+g|^p d\mu \cdot \left[\int |f+g|^p\right]^{-1/q}}_{\left[\int |f+g|^p\right]^{1-1/q} = \|f+g\|_p} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

COROLÁRIO 2. Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ é $\mathbb{C}$-subespaço de $\mathbb{C}^X$ e $\|\cdot\|_p$ é uma seminorma em $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Demonstração. (i) Se $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, então

$$\|f + g\|_p \overset{\text{Mink}}{\leq} \|f\|_p + \|g\|_p < \infty$$

donde $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

(ii) Se $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\|\alpha f\|_p = \left[\int |\alpha f|^p d\mu\right]^{1/p} = |\alpha| \left[\int |f|^p\right]^{1/p} = |\alpha| \|f\|_p < \infty$$

$\therefore\ \alpha f \in \mathcal{L}^p(\mu)$

$\square$

Por uma construção feita anteriormente (quando definimos o $(\mathsf{L}^1(\mu), \|\cdot\|_1)$), definimos (dado $p \in [1, \infty)$):

$$N \doteq \{f \in \mathcal{L}^p(\mu) | \|f\|_p = 0\} = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ mensurável} | f = 0\ \mu\text{-q.s.}\}$$

de modo que N é $\mathbb{C}$-subespaço de $\mathcal{L}^p(\mu)$ e, pondo: $\mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu) \doteq \mathcal{L}^p(\mu)/N$ e

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : \mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu) &\to [0, \infty) \\ [f] &\mapsto \|f\|_p \end{aligned}$$

então $(\mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu), \|\cdot\|_p)$ é um espaço normado.

Teorema 3. Com a notação acima, $(\mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Para $p = 1$, já demonstramos. Suponha $p > 1$. $\vdash$ toda série $\sum f_n$ absolutamente convergente em $(\mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu), \|\cdot\|_p)$ é convergente. Com efeito, dada uma tal série, sejam

$$\begin{aligned} (\forall n)\ G_n &\doteq \sum_{k=0}^{n} |f_k| \\ G &\doteq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \end{aligned}$$

(ambas estão em L^+). Por hipótese $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p = B \in [0, \infty)$. Note que, $\forall n$,

$$\|G_n\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_p = B < \infty$$

Além disso, $G_n \overset{\text{p.}}{\nearrow} G \therefore |G_n|^p \nearrow |G|^p$ e, pelo TCM,

$$\underbrace{\left[\int |G_n|^p d\mu\right]^{1/p}}_{\leq B} \to \left[\int |G|^p d\mu\right]^{1/p}$$

donde $\|G\|_p \leq B < \infty$, i.e. $G \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Em particular, $\int G^p d\mu < \infty \therefore G^p < \infty$ μ-q.s. donde

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| < \infty\ \mu\text{-q.s.}$$

Portanto, para μ-q.t. $x \in X$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge, e isso define uma função

$$\begin{aligned} f : \text{dom} f &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

mensurável definida quase-sempre. $\vdash$ $[f] \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu)$ e $\| \sum_{k=0}^{n} f_k - f\|_p \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Note que, $\forall x \in$dom$f$, $|f(x)| \leq G(x)$; como $G \in \mathcal{L}^p$, segue $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Além disso, $| \sum_{k=0}^{n} f_k - f|^p \xrightarrow{n \to \infty} 0$ μ-q.s. e, $\forall x \in$dom$f$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)\right|^p \overset{\text{des. } \triangle}{\leq} \Bigg[\underbrace{\sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|}_{\leq G(x)} + \underbrace{|f(x)|}_{\leq G(x)}\Bigg]^p \leq 2^p G(x)^p$$

e $2^p G^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Daí, pelo TCD:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int \left| \sum_{k=0}^{n} f_k - k \right|^p d\mu}_{\left\| \sum_{k=0}^{n} f_k - f \right\|^p} = 0$$

$\square$

Exercício:
Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, $p \in [1, \infty)$ e $S \doteq \{\varphi : X \to \mathbb{C}$ simples com $\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}, a_i \in \mathbb{C}, \mu(E_i) < \infty\}$. Então S é denso em $\mathsf{L}^\mathsf{p}(\mu)$.

Alguma motivação para a introdução da norma L^∞: Sejam X um conjunto e $f : X \to \mathbb{C}$ limitada. $\|f\|_u \doteq \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ define uma norma (chamada *norma da convergência uniforme*) no $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\{f : X \to \mathbb{C} | f$ limitada$\}$, a qual é completa.

Gostaríamos de definir uma norma similar para funções mensuráveis num espaço de medida, que independa da classe de equivalência da função módulo funções nulas quase sempre.

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável. A definição abaixo é motivada pela observação de que, se f limitada,

$$\|f\|_u = \inf\{C > 0 : \forall x \in X, |f(x)| \leq C\}$$

Definição 3. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável. Diz-se que $C \in [0, \infty]$ é *cota superior essencial para* f se $\mu\{x \in X : |f(x)| > C\} = 0$, i.e. se $|f| \leq C$ μ-q.s.

$$\|f\|_\infty \doteq \inf\{C \in [0, \infty] | C \text{ é cota superior essencial para } f\} = \inf\{C \in [0, \infty] : |f| \leq C \ \mu\text{-q.s.}\}$$

chama-se *supremo essencial de* f.

Exercício:
Com a notação acima:

1. $\mathcal{L}^\infty(\mu) \doteq \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) \doteq \{f : X \to \mathbb{C} : \|f\|_\infty < \infty\}$ é $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $\mathbb{C}^X$ e $\|\cdot\|_\infty$ é uma seminorma em $\mathcal{L}^\infty(\mu)$.
2. Se $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável, $\|f\|_\infty$ é uma cota superior essencial para f. Daí $\|f\|_\infty = 0$ `see` $f = 0$ μ-q.s.
3. $L^\infty(\mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu)/\{f : \|f\|_\infty = 0\}$ é completo com a normal induzida no quociente, ou seja, $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Exercício:
Se $0 < p < q < r \leq \infty$, $\mathsf{L}^\mathsf{q} \subset \mathsf{L}^\mathsf{p} + \mathsf{L}^\mathsf{r}$.
Sugestão: Dada $f \in \mathsf{L}^\mathsf{q}$, tome $A \doteq \{x \in X : |f(x)| \leq 1\}$ e escreva $f = f\chi_A + f\chi_{A^c}$.

Exercício:
Se $0 < p < q < r \leq \infty$, $\mathsf{L}^\mathsf{p} \cap \mathsf{L}^\mathsf{r} \subset \mathsf{L}^\mathsf{q}$. Além disso, tomando $\lambda \in (0,1)$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$, tem-se, para toda $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável, $\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$.
Sugestão: Basta verificar a desigualdade. Se $r = \infty$, o argumento é direto. Se $0 < p < q < r < \infty$, escreva $\frac{1}{q} = \frac{1}{p/\lambda} + \frac{1}{r/(1-\lambda)}$ e aplique a desigualdade de Hölder generalizada para o produto $|f| = |f|^\lambda |f|^{1-\lambda}$.