MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 22 (30/5)`

I) Funções de Variação Limitada (cont.)

Teorema 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

i) $f \in \mathrm{BV}$ *see* $\mathrm{Re}\, f \in \mathrm{BV}$ e $\mathrm{Im}\, f \in \mathrm{BV}$.

ii) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T_f \pm f$ são crescentes e limitadas (portanto estão em BV).

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pertence a BV *see* for a diferença de duas funções crescentes e limitadas. Em caso afirmativo, podemos tomar estas funções como sendo $\frac{1}{2}(T_f + f)$ e $\frac{1}{2}(T_f - f)$. Aproveitemos o ensejo para definir:

Definição 1. Com a notação acima, se $f \in \mathrm{BV}$ for a valores reais, $v^+ f \doteq \frac{1}{2}(T_f + f)$ e $v^- f \doteq \frac{1}{2}(T_f - f)$ chamam-se, respectivamente, *variação positiva* e *negativa* de f.

iv) existem e são finitos $f(x+)$ e $f(x-)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, bem como $f(\pm\infty)$. O conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.

v) Pondo $g(x) \doteq f(x+)$, f e g coincidem quase sempre (com respeito à medida de Lebesgue), são deriváveis quase sempre e suas derivadas coincidem quase sempre.

vi) Se $f \in \mathrm{BV}$, $T_f(-\infty) = 0$. Além disso, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x\pm) - f(x)| = |T_f(x\pm) - T_f(x)|$. Portanto, f é contínua à direita (respectivamente, à esquerda) em x *see* T_f o for.

vii) se f tomar valores reais e for contínua à direita (respectivamente, à esquerda) em $x \in \mathbb{R}$, suas variações positiva e negativa também o são.

Demonstração. i) Não há o que fazer.

ii) Sejam $x < y$ reais. Então $|f(y) - f(x)| \leq \mathrm{var}_{[x,y]}(f) = T_f(y) - T_f(x)$, de modo que:

(a) $f(y) - f(x) \leq T_f(y) - T_f(x)$, portanto $T_f(x) - f(x) \leq T_f(y) - f(y)$, donde se conclui que $T_f - f$ é crescente.

(b) $f(x) - f(y) \leq T_f(y) - T_f(x)$, portanto $T_f(x) + f(x) \leq T_f(y) + f(y)$, donde se conclui que $T_f + f$ é crescente.

Além disso, fixado $a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq T_f(x) - T_f(a) + |f(a)|$, o que implica f limitada, pois T_f o é. Então $T_f \pm f$ são limitadas.

iii) É corolário do item anterior e do exemplo da aula anterior, parte a).

iv) Basta observar que a afirmação vale para as variações positiva e negativa de $\mathrm{Re}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$, tendo em vista a proposição "diferenciabilidade de funções crescentes" (c.f. notas da aula 21).

v) Idem.

vi) Fixe $a \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $-\infty < x_0 < \cdots < x_N = a$ tais que $T_f(a) < \sum_{j=1}^N |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \epsilon \leq \mathrm{var}_{[x_0,a]}(f) + \epsilon = T_f(a) - T_f(x_0) + \epsilon$. Portanto, $T_f(x_0) < \epsilon$, donde $T_f(x) < \epsilon$ se $x \leq x_0$, i.e. $f(-\infty) = 0$.

Para todo $x < a$, $T_f(x) + |f(x) - f(a)| \leq T_f(a)$. Tomando $\lim_{x \to a^-}$, conclui-se que $T_f(a-) + |f(a-) - f(a)| \leq T_f(a)$, de modo que $|f(a-) - f(a)| \leq T_f(a) - T_f(a-)$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, fixe $x_0 < a$ e tome $x_0 < x_1 < \cdots < x_N = a$ tais que $T_f(a) - T_f(x_0) < \sum_{j=1}^N |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \epsilon$. Então, para todo $x \in (x_{N-1}, a)$:

$$\begin{aligned} T_f(x) - T_f(x_0) + |f(x) - f(a)| &\geq T_f(x_{N-1}) - T_f(x_0) + |f(x_{N-1}) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^{N-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_{N-1}) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > T_f(a) - T_f(x_0) - \epsilon \end{aligned}$$

donde $|f(x)-f(a)| \geq T_f(a)-T_f(x)-\epsilon$. Tomando $\lim_{x\to a^-}$, conclui-se que $|f(a-)-f(a)| \geq T_f(a)-T_f(a-)-\epsilon$. Daí, pela arbitrariedade do ϵ positivo tomado, segue-se $|f(a-)-f(a)| \geq T_f(a)-T_f(a-)$.

Portanto, $|f(a-)-f(a)| = T_f(a)-T_f(a-)$. Analogamente se prova $|f(a+)-f(a)| = T_f(a+)-T_f(a)$. Estas duas igualdades mostram que f é contínua à esquerda (respectivamente, à direita) em a `see` T_f for contínua à esquerda (respectivamente, à direita) em a.

vii) Se f for contínua à direita (resp., à esquerda) em $x \in \mathbb{R}$, T_f também o é, pelo item anterior. Então $T_f \pm f$ são contínuas à direita (resp., à esquerda) em x.

□

Definição 2. Diz-se que $f \in$ NBV (i.e. "normalized" BV) se $f \in$ BV, $f(-\infty) = 0$ e f contínua à direita.

Corolário 1. Se $f \in$ BV, então $\tilde{f} \doteq g - f(-\infty)$ pertence a NBV; $\tilde{f}$ chama-se *normalizada* de f.

Demonstração. Pela proposição "diferenciabilidade de funções crescentes" (c.f. notas da aula 21), $x \mapsto v^+(\operatorname{Re} f)(x+)$ e $x \mapsto v^-(\operatorname{Re} f)(x+)$ são funções crescentes e contínuas a direita. São limitadas, trivialmente, pois $\operatorname{Re} f$ o é. Então, como $(\forall x \in \mathbb{R}) \operatorname{Re} g(x) = \operatorname{Re} f(x+) = v^+(\operatorname{Re} f)(x+) - v^-(\operatorname{Re} f)(x+)$, conclui-se que $\operatorname{Re} g$ é contínua à direita, e segue-se do teorema 1, parte iii), que $\operatorname{Re} g$ está em BV. Analogamente, prova-se que $\operatorname{Im} g$ está em BV e é contínua à direita. Finalmente, $g(-\infty) = f(-\infty)$, de modo que $\tilde{f}(-\infty) = 0$, é contínua à direita e está em BV. □

Teorema 2 (caracterização das medidas complexas em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$). Seja μ uma medida complexa em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Então $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $F(x) \doteq \mu\big((-\infty, x]\big)$ está em NBV. Reciprocamente, dada $F \in$ NBV, existe uma única medida complexa μ_F em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ tal que $(\forall x) F(x) = \mu_F\big((-\infty, x]\big)$. Além disso, $|\mu_F| = \mu_{T_F}$ e, se f a valores reais, μ_F^+ e μ_F^- são induzidas, respectivamente, pelas variações positiva e negativa de F.

Demonstração. Quanto à primeira parte, basta observar que $x \mapsto (\operatorname{Re}\mu)^\pm\big(-\infty, x]$ e $x \mapsto (\operatorname{Im}\mu)^\pm\big(-\infty, x]$ são funções crescentes, limitadas e contínuas à direita (pela continuidade para baixo da medida).

Reciprocamente, dada $F \in$ NBV, $v^\pm(\operatorname{Re} F)$ e $v^\pm(\operatorname{Im} F)$ são funções crescentes, contínuas à direita e limitadas. Tais funções induzem, respectivamente, medidas de Lebesgue-Stieljes finitas $\nu^\pm$ e $\lambda^\pm$. Defina $\mu \doteq (\nu^+ - \nu^-) + i(\lambda^+ - \lambda^-)$. Então μ é uma medida complexa em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ e, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mu\big((-\infty, x]\big) = F(x)$ (aqui usamos $F(-\infty) = 0$; verifique).

Se μ' for outra medida complexa em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ tal que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mu'\big((-\infty, x]\big) = F(x)$, então $\operatorname{Re}\mu'$ e $\operatorname{Im}\mu'$ são medidas com sinal finitas e coincidem em todos os h-intervalos de $\mathbb{R}$ com, respectivamente, $\operatorname{Re}\mu$ e $\operatorname{Im}\mu$. Decorre do lema abaixo, provado ao final, que $\mu = \mu'$, donde a unicidade enunciada para a medida complexa que induz F, a qual denotaremos, doravante, por μ_F.

Lema 1. Sejam λ e ν medidas com sinal finitas em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ tais que λ e ν coincidem em todos os h-intervalos limitados $(a, b]$, $a < b$ reais. Então $\lambda = \nu$.

Verifiquemos que $|\mu_F| = \mu_{T_F}$. Seja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G(x) \doteq |\mu_F|\big((-\infty, x]\big)$, de modo que $|\mu_F| = \mu_G$. Provemos que $G = T_F$, o que será feito em três etapas:

1. $T_F \leq G$. De fato, se $x \in \mathbb{R}$ e $-\infty < t_0 < \cdots < t_N = x$, tem-se $\sum_{j=1}^n |F(t_j) - F(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^n |\mu_F\big((t_{j-1}, t_j]\big)| \leq \sum_{j=1}^n |\mu_F|\big((t_{j-1}, t_j]\big) = |\mu_F|\big((t_0, x]\big) \leq |\mu_F|\big((-\infty, x]\big) = G(x)$, donde $T_F(x) = \sup\{\sum_{j=1}^N |f(t_j) - f(t_{j-1})| : N \in \mathbb{N}, -\infty < t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x\} \leq G(x)$.

2. Para todo $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, $|\mu_F(A)| \leq \mu_{T_F}(A)$. Com efeito:

   (a) Se A for um h-intervalo limitado $(a, b]$, $a < b$ reais, então $|\mu_F(A)| = |F(b) - F(a)| \leq T_F(b) - T_F(a) = \mu_{T_F}(A)$.

   (b) Se A for um intervalo aberto limitado (a, b), $a < b$ reais, então, tomando $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec (a, b)$ tal que $b_n \nearrow b$, segue da continuidade para cima das medidas e do item anterior que $|\mu_F(A)| = \lim |\mu_F\big((a, b_n]\big)| \leq \lim \mu_{T_F}\big((a, b_n]\big) = \mu_{T_F}(A)$.

   (c) Se A for um intervalo aberto qualquer, A se escreve como união enumerável crescente de intervalos abertos e limitados; então a desigualdade segue do item anterior e da continuidade para cima das medidas μ_F e μ_{T_F}.

   (d) Se A for um aberto qualquer em $\mathbb{R}$, A se escreve como união de uma sequência disjunta de intervalos abertos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Daí a desigualdade segue pelo item anterior e pela σ-aditividade das medidas:

$$|\mu_F(A)| = |\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_F(I_n)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu_F(I_n)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{T_F}(I_n) = \mu_{T_F}(A)$$

(e) Finalmente, para um boreliano A qualquer: dado $\epsilon > 0$, tome $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência decrescente de abertos tal que $A \subset \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_n$, $\mu_{T_F}(\mathcal{U}_1 \setminus A) < \epsilon$ e $\mu_F(\mathcal{U}_n) \to \mu_F(A)$ (para verificar que existe uma tal sequência, use a regularidade das medidas de Lebesgue-Stieltjes: tome $\mathcal{U}_1 \supset A$ aberto tal que $\mu_{T_F}(\mathcal{U}_1 \setminus A) < \epsilon$; indutivamente, supondo $\mathcal{U}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{U}_n \supset A$ definidos, tome $\mathcal{U}_{n+1} \subset \mathcal{U}_n$ aberto contendo A tal que, se λ for a parte positiva ou negativa das partes real ou imaginária de μ_F, tenha-se $\lambda(\mathcal{U}_{n+1} \setminus E) < 1/n$). Então, pelo item anterior:

$$|\mu_F(A)| = \lim|\mu_F(\mathcal{U}_n)| \leq \lim \mu_{T_F}(\mathcal{U}_n) \leq \mu_{T_F}(\mathcal{U}_1) \leq \mu_{T_F}(A) + \epsilon$$

o que implica a desigualdade afirmada, pela arbitrariedade do ϵ positivo tomado.

3. Para todo $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ e para toda $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{B}_\mathbb{R}$ tal que $A = \dot\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, tem-se, pelo item anterior:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|\mu_F(A_n)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{T_F}(A_n) = \mu_{T_F}(A)$$

o que implica, pelo exercício 21 da seção 3.3 (lista 14), $|\mu_F|(A) \leq \mu_{T_F}(A)$. Em particular, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = |\mu_F|\big((-\infty, x]\big) \leq \mu_{T_F}\big((-\infty, x]\big) = T_F(x)$. Portanto, $G = T_F$, como afirmado.

Finalmente, se F a valores reais:

$$\mu_{v^+F} = \mu_{\frac{1}{2}(T_F+F)} = \frac{1}{2}(\mu_F + \mu_{T_F}) = \frac{1}{2}(\mu_F + |\mu_F|) = \mu_F^+$$

e, analogamente, $\mu_{v^-F} = \mu_F^-$.

□

Prova do lema 1. Sejam $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ e $\nu = \nu^+ - \nu^-$ as respectivas decomposições de Jordan. Então, para todo h-intervalo limitado $(a, b]$, $\lambda^+\big((a, b]\big) - \lambda^-\big((a, b]\big) = \nu^+\big((a, b]\big) - \nu^-\big((a, b]\big)$, de modo que as medidas positivas finitas $\lambda^+ + \nu^-$ e $\nu^+ + \lambda^-$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ coincidem em todos os h-intervalos limitados. Então $\lambda^+ + \nu^-$ e $\nu^+ + \lambda^-$ são medidas de Lebesgue-Stieltjes e coincidem nos h-intervalos limitados, portanto coincidem em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$, conforme já vimos quando da discussão da unicidade das medidas de Lebesgue-Stieltjes. A saber, elas também coincidem nos h-intervalos ilimitados (usando a continuidade para cima da medida). Então tais medidas também coincidem na álgebra gerada pelos h-intervalos (a qual gera $\mathcal{B}_\mathbb{R}$), que é o conjunto de todas as uniões finitas disjuntas de h-intervalos. Como são finitas nessa álgebra, podemos aplicar a unicidade enunciada no teorema de extensão de Carathéodory para concluir que $\lambda^+ + \nu^-$ e $\nu^+ + \lambda^-$ coincidem em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Portanto, $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ e $\nu = \nu^+ - \nu^-$ coincidem em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. □

Exemplo 1: Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ uma função contínua e de variação limitada. Estenda γ a uma função em BV, pondo $\gamma(t) = \gamma(a)$ se $t \leq a$ e $\gamma(t) = \gamma(b)$ se $t \geq b$, a qual ainda será denotada por γ, e tome $\Gamma \in$ NBV a sua normalizada (i.e. $\Gamma = \gamma - \gamma(a)$, pois γ é contínua). Podemos considerar, pois, a medida complexa em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ induzida por Γ, a qual denotaremos por μ_γ. Como $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é boreliana (pois é contínua), faz sentido tomar o pushforward $\gamma_*\mu_\gamma$ (o pushforward para medidas complexas se define da mesma forma que para medidas positivas, e valem as mesmas propriedades), que é uma medida complexa em $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_\mathbb{C}) \equiv (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$. As integrais de linha definidas no âmbito da Análise Complexa coincidem com a integral contra este pushforward. Ou seja, denotando por γ^* a imagem de γ em $\mathbb{C}$ (que é um compacto, pela continuidade de γ) e, dada $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ contínua, sendo $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a extensão canônica de f, então:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int \tilde{f}\,\mathrm{d}(\gamma_*\mu_\gamma) = \int f \circ \gamma\,\mathrm{d}\mu_\gamma$$

Note que a integral no segundo membro faz sentido, pois $\tilde{f}$ é mensurável (pois sua restrição aos borelianos γ^* e $(\gamma^*)^c$ são mensuráveis) e limitada (pois f é contínua num compacto, logo limitada), portanto integrável.

Podemos transferir, pois, os teoremas demonstrados aqui para o estudo dessas integrais de linha.

A seguir, em vista do teorema anterior, questão natural a ser colocada é: dada $F \in$ NBV, sob que condições μ_F é mutuamente singular ou absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue?

Proposição 1. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ em NBV. Então $F' \in \mathsf{L}^1(m)$ e F' coincide m-quase sempre com a derivada de Radon-Nikodym da parte absolutamente contínua de μ_F com respeito a m. Em particular:

i) $\mu_F \perp m$ *see* $F' = 0$ m-quase sempre.

ii) $\mu_F \ll m$ *see* $\mu_F = F'\,\mathrm{d}m$ *see* $(\forall x \in \mathbb{R})F(x) = \int_{-\infty}^x F'\,\mathrm{d}m$.

Demonstração. Toda medida complexa em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ é uma medida de Radon (pois sua variação total é finita e, em particular, finita nos compactos). Portanto, sendo $\mu_F = \nu_s + \nu_a$ a decomposição de Lebesgue de μ_F com respeito a m, segue-se do teorema de diferenciação de Lebesgue para medidas que, para m-quase todo $x \in \mathbb{R}$ e para toda família $(E_r)_{r>0} \prec \mathcal{B}_\mathbb{R}$ que convirja agradavelmente para x,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu_F(E_r)}{m(E_r)} = \frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}m}(x)$$

Em particular, para tais x, tomando-se as famílias $(x-r, x]$ e $(x, x+r]$, conclui-se que $F'(x) = \frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}m}(x)$, como afirmado (e disso segue $F' \in \mathsf{L}^1(m)$, pois a derivada de Radon-Nidodym é integrável). O item i) e a primeira equivalência no item ii) são corolários desta afirmação; a segunda equivalência em ii) é corolário do teorema anterior. □

A condição $\mu_F \ll m$ também pode ser caracterizada usando a noção clássica de *continuidade absoluta*:

Definição 3. Diz-se que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é *absolutamente contínua* se, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, para toda sequência finita $\{(a_i, b_i)\}_{1\leq i\leq N}$ de intervalos abertos disjuntos tal que $\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta$, tem-se $\sum_{i=1}^N |F(b_i) - F(a_i)| < \epsilon$. Analogamente, $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ diz-se absolutamente contínua se a condição acima valer para toda sequência finita disjunta $\{(a_i, b_i)\}_{1\leq i\leq N}$ de intervalos abertos contidos em $[a, b]$.

Note que, se F for absolutamente contínua, então F é uniformemente contínua (use $N = 1$ na definição).

Proposição 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ em NBV. Então $\mu_F \ll m$ ***see*** F for absolutamente contínua.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha $\mu_F \ll m$. Então $|\mu_F| \ll m$. Pela proposição "caracterização da continuidade absoluta para medidas finitas" (c.f. notas da aula 17), $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, se $E \in \mathcal{M}$ e $m(E) < \delta$, então $|\mu_F|(E) < \epsilon$. Em particular, se $\{(a_i, b_i)\}_{1\leq i\leq N}$ for uma sequência de intervalos abertos disjuntos tal que $\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta$, pondo $E \doteq \dot\bigcup_{1\leq i\leq N}(a_i, b_i]$, tem-se $m(E) < \delta$, de modo que $\epsilon > |\mu_F|(E) = \sum_{i=1}^N |\mu_F|\big((a_i, b_i]\big) \geq \sum_{i=1}^N |\mu_F\big((a_i, b_i]\big)| = \sum_{i=1}^N |F(b_i) - F(a_i)|$.

($\Leftarrow$) Suponha F absolutamente contínua. Em particular, F é contínua; portanto, $(\forall x \in \mathbb{R})\mu_F(\{x\}) = 0$, de modo que, para todo intervalo aberto e limitado $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $\mu_F\big((a, b)\big) = \mu_F\big((a, b]\big)$.

Dado $E \in \mathcal{M}$ tal que $m(E) = 0$, mostremos que $\mu_F(E) = 0$. Para tal, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta > 0$ de modo a satisfazer a condição na definição de continuidade absoluta para F, c.f. a definição 3. Como no item 2e da demonstração do teorema 2 (caracterização das medidas complexas em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$), tome $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência decrescente de abertos tal que $E \subset \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_n$, $m(\mathcal{U}_1) < \delta$ ($\therefore m(\mathcal{U}_n) < \delta, \forall n$) e $\mu_F(\mathcal{U}_n) \to \mu_F(E)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ é a reunião de uma família enumerável disjunta $\{I_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos; e, como $\mathcal{U}_n$ tem medida de Lebesgue finita, todos os tais intervalos são limitados, digamos, $I_k^n = (a_k^n, b_k^n)$, com $a_k^n < b_k^n$ reais. Além disso, o fato de ser $(\forall n \in \mathbb{N}) m(\mathcal{U}_n) = \sum_{k=1}^\infty (b_k^n - a_k^n) < \delta$ implica, para todo $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^N |F(b_k^n) - F(a_k^n)| < \epsilon$, de modo que $(\forall n)|\mu_F(\mathcal{U}_n)| = |\sum_{k=1}^\infty \mu_F(a_k^n, b_k^n)| = |\sum_{k=1}^\infty \mu_F(a_k^n, b_k^n]| \leq \sum_{k=1}^\infty |\mu_F(a_k^n, b_k^n]| = \sum_{k=1}^\infty |F(b_k^n) - F(a_k^n)| \leq \epsilon$. Logo, $|\mu_F(E)| = \lim|\mu_F(\mathcal{U}_n)| \leq \epsilon$. Pela arbitrariedade do ϵ positivo tomado, conclui-se que $\mu_F(E) = 0$, donde $\mu_F \ll m$.

□

Corolário 2. Dada $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, são equivalentes:

a) Existe $f \in \mathsf{L}^1(m)$ tal que $(\forall x \in \mathbb{R})F(x) = \int_{-\infty}^x f\,\mathrm{d}m$.

b) $F \in$ NBV e F é absolutamente contínua.

c) $F \in$ NBV e $\mu_F \ll m$.

Em caso afirmativo, $f = F'$ m-q.s. e coincide m-q.s. com a derivada de Radon-Nikodym de $F\,\mathrm{d}m$ com respeito a m.

Demonstração. Já sabemos que b)$\Leftrightarrow$ c). Se existir $f \in \mathsf{L}^1$ como em a), então $f\,\mathrm{d}m$ é uma medida complexa e $F(x) = (f\,\mathrm{d}m)(-\infty, x]$, de modo que, pelo teorema sobre caracterização das medidas complexas em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ (teorema 2), $F \in$ NBV e $\mu_F = f\,\mathrm{d}m \ll m$. Portanto, a)$\Rightarrow$c). Finalmente, se ocorrer c), a proposição 1 implica $\mu_F = F'\,\mathrm{d}m$, obtendo-se a) com $f = F' \in \mathsf{L}^1(m)$. Em caso afirmativo, i.e. caso uma das condições ocorra (portanto todas elas), f no item a) coincide com a derivada de Radon Nikodym de μ_F com respeito a m, a qual coincide m-quase sempre com F', pela proposição 1. □

Para funções absolutamente contínuas em intervalos compactos o coroário acima pode ser refinado, em vista da seguinte:

Proposição 3. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ absolutamente contínua. Então f é de variação limitada.

Demonstração. Na definição 3, tome δ correspondente a $\epsilon = 1$. Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\}$ partição de $[a, b]$ tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$, para $1 \leq i \leq N$. Então, para toda partição $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ que refine P, tem-se $\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < N$, o que implica $\mathrm{var}_{[a,b]}(f) \leq N$. $\square$

Teorema 3 (Teorema Fundamental do Cálculo para a integral de Lebesgue). Sejam $a < b$ reais e $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. São equivalentes:

a) f é absolutamente contínua.

b) Existe $g \in \mathsf{L}^1([a, b], \mathcal{B}, m)$ tal que $(\forall x \in [a, b]) f(x) = f(a) + \int_a^x g \, \mathrm{d}m$.

c) f é derivável m-quase sempre em $[a, b]$, $f' \in \mathsf{L}^1$ e $(\forall x \in [a, b]) f(x) = f(a) + \int_a^x f' \, \mathrm{d}m$.

Em caso afirmativo, g como no item b) coincide m-q.s. com f'.

Demonstração. **a)⇒ c):** Sendo f absolutamente contínua, a proposição anterior garante $f \in \mathrm{BV}([a, b])$. Seja $\tilde{f} \in \mathrm{BV}$ a extensão canônica de f e $F \in \mathrm{NBV}$ a regularizada de $\tilde{f}$; como $\tilde{f}$ é contínua, F coincide com $\tilde{f} - f(a)$. Sendo f absolutamente contínua, F também o é, i.e. $F \in \mathrm{NBV}$ e F absolutamente contínua. Pelo corolário 2, $F' \in \mathsf{L}^1(m)$ e $(\forall x \in \mathbb{R}) F(x) = \int_{-\infty}^x F' \, \mathrm{d}m$. Como a diferença entre f e a restrição de F a $[a, b]$ é constante e igual a $f(a)$, conclui-se que f é derivável quase sempre e $f' = F'$ quase sempre em $[a, b]$, portanto f' é integrável. Finalmente, $(\forall x \in [a, b]) f(x) - f(a) = F(x) = \int_{-\infty}^x F' \, \mathrm{d}m = \int_a^x f' \, \mathrm{d}m$.

c)⇒b): Nada a fazer.

b)⇒a): Estenda g a uma função $G \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$, pondo $G = 0$ no complementar de $[a, b]$. Pelo corolário 2, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $(\forall x \in \mathbb{R}) F(x) = \int_{-\infty}^x G \, \mathrm{d}m$ está em NBV, é absolutamente contínua e $F' = G$ m-quase sempre. Para $x \in [a, b]$, como $G = 0$ no complementar de $[a, b]$, tem-se $F(x) = \int_a^x G \, \mathrm{d}m = \int_a^x g \, \mathrm{d}m = f(x) - f(a)$, ou seja, a diferença entre f e a restrição de F a $[a, b]$ é constante e igual a $f(a)$. Isso mostra que f é absolutamente contínua (pois F o é), de modo que b)⇒a); também mostra que, no caso afirmativo, m-quase sempre em $[a, b]$: $g = G = F' = f'$.

$\square$

Teorema 4 (integração por partes). Sejam $a < b$ reais e $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ em NBV, sendo ao menos uma delas contínua. Então $\int_{(a,b]} F \, \mathrm{d}\mu_G + \int_{(a,b]} G \, \mathrm{d}\mu_F = F(b)G(b) - F(a)G(a)$.

Demonstração. Deixada com exercício, seguindo o seguinte roteiro: 1) reduza ao caso em que F e G são crescentes; 2) Digamos que G seja contínua. Ponha $\Omega \doteq \{(x, y) \in (a, b] \times (a, b] | x \leq y\} \subset \mathbb{R}^2$ e calcule $\mu_F \times \mu_G(\Omega)$ pelo teorema de Tonelli, fazendo-se as integrais iteradas nas duas ordens. $\square$