MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 21 (25/5)`

`I) Funções de Variação Limitada` Nesta seção, aplicaremos o teorema de diferenciação de Lebesgue em dimensão 1, o que resultará numa generalização do Teorema Fundamental do Cálculo para a integral de Lebesgue.

Notação: Dada f função real, usaremos a notação $f(x\pm)$ para denotar $\lim_{y\to x^\pm} f(y)$.

Proposição 1. Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ crescente e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)\doteq f(x+)$. Então:

1) g é crescente e contínua à direita.

2) o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.

3) f e g são deriváveis m-q.s. e $f'=g'$ m-q.s.

Demonstração. 1. deixado como exercício.

2. se $x\neq y$, os intervalos $\big(f(x-),f(x+)\big)$ e $\big(f(y-),f(y+)\big)$ são disjuntos. Além disso, se $|x|<N$, $\big(f(x-),f(x+)\big)\subset\big(f(-N),f(N)\big)$, de modo que $\{\big(f(x-),f(x+)\big)\}_{|x|<N}$ é uma família disjunta de subintervalos de $\big(f(-N),f(N)\big)$. Portanto, para cada $N>0$:

$$\sum_{|x|<N} m\big(f(x-),f(x+)\big)\le m\big(f(-N),f(N)\big)<\infty$$

o que implica que $\{x\in(-N,N)|f(x-)\neq f(x+)\}$ é enumerável. Como $\mathbb{R}=\cup_{N\in\mathbb{N}}(-N,N)$, conclui-se que $\{x\in\mathbb{R}|f(x-)\neq f(x+)\}$ é enumerável.

3. Note que g é crescente e contínua à direita, $f\le g$ e vale a igualdade onde f for contínua; em particular, o conjunto dos pontos onde as duas funções diferem é enumerável.

Seja μ_g a medida de Lebesgue-Stieltjes induzida por g. Como μ_g é finita nos compactos, i.e. uma medida de Radon, o teorema de diferenciação de diferenciação de Lebesgue pode ser aplicado, escolhendo-se, para cada $x\in\mathbb{R}$, as famílias $\{(x-r,x]\}_{r>0}$ e $\{(x,x+r]\}_{r>0}$, as quais convergem agradavelmente para x. Como

$$\frac{\mu_g(x-r,x]}{m(x-r,x]}=\frac{g(x)-g(x-r)}{r}\quad\text{e}\quad\frac{\mu_g(x,x+r]}{m(x,x+r]}=\frac{g(x+r)-g(x)}{r}$$

conclui-se que a derivada de g existe m-q.s. e coincide m-q.s. com a derivada de Radon-Nikodym da parte absolutamente contínua de μ_g com respeito a m.

Pondo $h\doteq g-f$, provemos que h é derivável m-q.s. e que sua derivada se anula m-q.s.; daí, como $f=g-h$, concluir-se-á que f é derivável m-q.s. e sua derivada coincide m-q.s. com a de g, donde a tese.

Conforme observado anteiormente, $h\ge 0$ e h se anula no complementar de um conjunto enumerável; seja $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma enumeração do tal conjunto. Considere a medida positiva $\mu\doteq\sum_{i\in\mathbb{N}}h(x_i)\delta_{x_i}$; afirmo que μ é de Radon, i.e. finita nos compactos. Isso decorre do mesmo argumento da parte 2. — $\forall N>0$, $\mu\big(f(-N),f(N)\big)=\sum_{x_i\in(-N,N)}h(x_i)\le m(-N,N)<\infty$. Além disso, $\mu\perp m$, pois $A\doteq\{x_i|i\in\mathbb{N}\}$ é um boreliano para o qual $m(A)=0=\mu(A^c)$. Assim sendo, para $x\in\mathbb{R}$ e $r\neq 0$:

$$\left|\frac{h(x+r)-h(x)}{r}\right|\le\frac{h(x+r)+h(x)}{|r|}\le 4\frac{\mu(x-2|r|,x+2|r|)}{4|r|}$$

o que, pelo teorema de diferenciação de Lebesgue para medidas, tem limite 0 para $r\to 0$ para quase todo $x\in\mathbb{R}$, pois $\{(x-2r,x+2r)\}_{r>0}$ é uma família de converge agradavelmente para x e a parte absolutamente contínua de μ com respeito a m é nula.

□

As medidas de Radon em $\mathbb{R}$ (i.e. as medidas de Lebesgue-Stieltjes) foram descritas anteriormente por meio de funções crescentes de contínuas à direita $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, c.f. notas da aula 5. Descreveremos, a seguir, através de uma construção similar, como são as medidas complexas em $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Para tal, usaremos, no lugar de funções crescentes, funções de *variação limitada*, conforme definido abaixo.

Definição 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. A *função variação total de f* é a função $T_f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ dada por:

$$T_f(x) \doteq \sup\{\sum_{j=1}^{N}|f(t_j) - f(t_{j-1})| : N \in \mathbb{N}, -\infty < t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x\} \tag{1}$$

Note que T_f é crescente, pois, trivialmente, se $x < y$, $T_f(y) \geq T_f(x) + |f(y) - f(x)|$. Assim sendo, para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, existem $T_f(-\infty) \leq T_f(+\infty) \in [0,\infty]$.

Definição 2. Com a notação acima, diz-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é de *variação limitada* (notação: $f \in \mathrm{BV}$) se $T_f(+\infty) < \infty$.

Analogamente, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ diz-se de *variação limitada* (notação: $f \in \mathrm{BV}([a,b])$) se a sua *variação* $\mathrm{var}_{[a,b]}(f) \doteq \sup\{\sum_{j=1}^{N}|f(t_j) - f(t_{j-1})||N \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\}$ for finita.

Note que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\forall x < y \in \mathbb{R}$, $T_f(y) = T_f(x) + \mathrm{var}_{[x,y]}(f)$. Portanto, se $f \in \mathrm{BV}$, $\mathrm{Im}\, T_f \subset \mathbb{R}$ e as restrições de f aos subintervalos compactos de $\mathbb{R}$ são de variação limitada.

Toda função $f \in \mathrm{BV}([a,b])$ pode ser estendida a uma função $\tilde{f} \in \mathrm{BV}$; por exemplo, $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\tilde{f}|_{[a,b]} = f$, $f(x) = f(a)$ para $x \leq a$ e $f(x) = f(b)$ para $x \geq b$. Através desta extensão, teoremas relativos às funções de BV têm versões correspondentes para funções em $\mathrm{BV}([a,b])$. Por esta razão, enunciaremos apenas propriedades para BV, ficando subentendido que em $\mathrm{BV}([a,b])$ valem propriedades análogas.

Exemplo 1: a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for crescente, então $f \in \mathrm{BV}$ *see* f limitada. Basta observar que, se f crescente, $(\forall x \in \mathbb{R}) T_f(x) = f(x) - f(-\infty)$.

b) BV é um $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Basta observar que, se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $a, b \in \mathbb{C}$, $(\forall x \in \mathbb{R}) T_{af+bg}(x) \leq |a|T_f(x) + |b|T_g(x)$.

c) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ derivável e f' limitada, então $f \in \mathrm{BV}([a,b])$ para todo $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Basta aplicar o teorema do valor médio.

d) $\sin \notin \mathrm{BV}$, mas $\sin \in \mathrm{BV}([a,b])$ para todo $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Teorema 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

i) $f \in \mathrm{BV}$ *see* $\mathrm{Re}\, f \in \mathrm{BV}$ e $\mathrm{Im}\, f \in \mathrm{BV}$.

ii) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T_f \pm f$ são crescentes e limitadas (portanto estão em BV).

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pertence a BV *see* for a diferença de duas funções crescentes e limitadas. Em caso afirmativo, podemos tomar estas funções como sendo $\frac{1}{2}(T_f + f)$ e $\frac{1}{2}(T_f - f)$.

iv) Se $f \in \mathrm{BV}$, $T_f(-\infty) = 0$. Além disso, dado $x \in \mathbb{R}$, f é contínua à direita em x *see* T_f o for. Idem para continuidade à esquerda em x.

Demonstração. i) Não há o que fazer.

ii) Sejam $x < y$ reais. Então $|f(y) - f(x)| \leq \mathrm{var}_{[x,y]}(f) = T_f(y) - T_f(x)$, de modo que:

(a) $f(y) - f(x) \leq T_f(y) - T_f(x)$, portanto $T_f(x) - f(x) \leq T_f(y) - f(y)$, donde se conclui que $T_f - f$ é crescente.

(b) $f(x) - f(y) \leq T_f(y) - T_f(x)$, portanto $T_f(x) + f(x) \leq T_f(y) + f(y)$, donde se conclui que $T_f + f$ é crescente.

Além disso, fixado $a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq T_f(x) - T_f(a) + |f(a)|$, o que implica f limitada, pois T_f o é. Então $T_f \pm f$ são limitadas.

iii) É corolário do item anterior e do exemplo 1, parte a).

iv) Fixe $a \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $-\infty < x_0 < \cdots < x_N = a$ tais que $T_f(a) < \sum_{j=1}^{N}|f(x_i) - f(x_{i-1})| + \epsilon \leq \mathrm{var}_{[x_0,a]}(f) + \epsilon = T_f(a) - T_f(x_0) + \epsilon$. Portanto, $T_f(x_0) < \epsilon$, donde $T_f(x) < \epsilon$ se $x \leq x_0$, i.e. $f(-\infty) = 0$.

Para todo $x < a$, $T_f(x) + |f(x) - f(a)| \leq T_f(a)$. Tomando $\lim_{x \to a^-}$, conclui-se que $T_f(a-) + |f(a-) - f(a)| \leq T_f(a)$, de modo que $|f(a-) - f(a)| \leq T_f(a) - T_f(a-)$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, fixe $x_0 < a$ e tome $x_0 < x_1 < \cdots < x_N = a$ tais que $T_f(a) - T_f(x_0) < \sum_{j=1}^{N}|f(x_i) - f(x_{i-1})| + \epsilon$. Então, para todo $x \in (x_{N-1}, a)$:

$$
\begin{aligned}
T_f(x) - T_f(x_0) + |f(x) - f(a)| &\geq T_f(x_{N-1}) - T_f(x_0) + |f(x_{N-1}) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \geq \\
&\geq \sum_{j=1}^{N-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_{N-1}) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \geq \\
&\geq \sum_{j=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > T_f(a) - T_f(x_0) - \epsilon
\end{aligned}
$$

donde $|f(x)-f(a)| \geq T_f(a)-T_f(x)-\epsilon$. Tomando $\lim_{x\to a^-}$, conclui-se que $|f(a-)-f(a)| \geq T_f(a)-T_f(a-)-\epsilon$. Daí, pela arbitrariedade do ϵ positivo tomado, segue-se $|f(a-) - f(a)| \geq T_f(a) - T_f(a-)$.

Portanto, $|f(a-) - f(a)| = T_f(a) - T_f(a-)$. Analogamente se prova $|f(a+) - f(a)| = T_f(a+) - T_f(a)$. Estas duas igualdades mostram que f é contínua à esquerda (respectivamente, à direita) em a ***see*** T_f for contínua à esquerda (respectivamente, à direita) em a.

$\square$

Definição 3. Com a notação do teorema acima, se $f \in \mathrm{BV}$ for a valores reais, $v^+ f \doteq \frac{1}{2}(T_f + f)$ e $v^- f \doteq \frac{1}{2}(T_f - f)$ chamam-se, respectivamente, *variação positiva* e *negativa* de f.