MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 20 (23/5)`

`I) Diferenciação em Espaços Euclidianos (continuação).` Recordando: demonstramos na aula passada o teorema abaixo.

Teorema 1 (teorema de diferenciação de Lebesgue, versão 1). Seja $f \in \mathsf{L}^1_{\mathsf{loc}}(m)$, onde m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Então, para m-quase todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}m \tag{1}$$

Podemos reescrever (1) como:

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} [f(y) - f(x)] \,\mathrm{d}m(y) = 0$$

o que vale, conforme acabamos de provar, para m-quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Verificaremos, a seguir, que vale algo mais forte: para m-quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, a igualdade acima vale com $|f(y) - f(x)|$ no lugar de $f(y) - f(x)$.

Definição 1 (pontos de Lebesgue). Seja $f \in \mathsf{L}^1_{\mathsf{loc}}(m)$. Diz-se que $x \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto de Lebesgue* de f (notação: $x \in L_f$) se

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}m(y) = 0 \tag{2}$$

Teorema 2. Se $f \in \mathsf{L}^1_{\mathsf{loc}}(m)$, então o complementar do conjunto dos pontos de Lebesgue de f tem medida de Lebesgue zero.

Demonstração. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto enumerável denso. Para cada $c \in D$, $\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - c| \,\mathrm{d}m(y) = |f(x) - c|$ para x no complementar de um conjunto nulo $E_c \subset \mathbb{R}^n$; isso decorre do teorema de diferenciação de Lebesgue 1 aplicado a $|f - c|$. Então $E \doteq \cup_{c\in D} E_c$ é um conjunto nulo; afirmo que todo ponto no complementar de E é de Lebesgue.

Com efeito, seja $x \in E^c$. Dado $\epsilon > 0$, tome $c \in D$ tal que $|f(x) - c| < \epsilon$. Então, $\forall r > 0$, $\fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}m(y) \le \fint_{B(x,r)} |f(y) - c| \,\mathrm{d}m(y) + |c - f(x)|$, donde $\limsup_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}m(y) \le 2|f(x) - c| = 2\epsilon$. $\square$

Consideraremos, a seguir, médias em conjuntos mais gerais que bolas.

Definição 2. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que uma família $(E_r)_{r>0} \prec \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ *converge agradavelmente* para x se:

agradável.i) $\forall r > 0$, $E_r \subset B(x, r)$.

agradável.ii) Existe $\alpha > 0$ tal que $\forall r > 0$, $m(E_r) > \alpha m\big(B(x, r)\big)$.

Teorema 3 (teorema de diferenciação de Lebesgue, versão 2). Seja $f \in \mathsf{L}^1_{\mathsf{loc}}(m)$. Então, para todo ponto x no conjunto de Lebesgue de f (portanto, para m-quase todo ponto), e para toda família $(E_r)_{r>0}$ que convirja agradavelmente para x, tem-se:

$$\lim_{r\to 0} \fint_{E_r} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}m(y) = 0. \tag{3}$$

Demonstração. Sejam $x \in L_f$ e $(E_r)_{r>0}$ que convirja agradavelmente para x. Tome $\alpha > 0$ conforme a segunda condição da definição 2. Então, $\forall r > 0$:

$$\frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}m(y) \le \frac{1}{\alpha m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}m(y) \xrightarrow{r\to 0} 0$$

$\square$

Finalmente, será apresentada uma versão do teorema de diferenciação de Lebesgue para medidas.

Definição 3. Uma medida positiva μ em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ diz-se *de Radon* se for finita nos compactos. Uma medida ν com sinal ou complexa em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ diz-se *de Radon* se sua variação total $|\nu|$ o for.

O lema abaixo será provado mais adiante, quando do estudo das medidas de Radon em espaços localmente compactos.

Lema 1. Seja μ medida de Radon positiva em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$. Então, para todo boreliano $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(E) = \inf\{\mu(\mathcal{U}) | E \subset \mathcal{U} \text{ aberto}\} = \sup\{\mu(K) | K \subset\subset E\}$.

Teorema 4 (teorema de diferenciação de Lebesgue para medidas). Sejam ν medida de Radon com sinal ou complexa em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ e $\nu = \lambda + f\,\mathrm{d}m$ a sua decomposição de Lebesgue-Radon-Nikodym com respeito à medida de Lebesgue m. Então, para m-quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, e para toda família de borelianos $(E_r)_{r>0}$ que convirja agradavelmente para x, tem-se:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\nu(E_r)}{m(E_r)} = f(x) \tag{4}$$

Demonstração. Note que $|\nu| = |\lambda| + |f|\,\mathrm{d}m$. Assim, por ser ν de Radon, suas partes singular e absolutamente contínuas também o são, de modo que f é, necessariamente, localmente integrável.

Como $f \in \mathsf{L}^1_{\mathsf{loc}}(m)$, segue-se do teorema 3 que, para m-quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, para toda $(E_r)_{r>0}$ agradável para x, $\lim_{r\to 0} ⨍_{E_r} f\,\mathrm{d}m = f(x)$. Então basta verificar que, para m-quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, para toda $(E_r)_{r>0}$ agradável para x:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\lambda(E_r)}{m(E_r)} = 0 \tag{5}$$

Podemos supor λ positiva e $E_r = B(x,r)$, pois, tomando α como na definição 2:

$$\left|\frac{\lambda(E_r)}{m(E_r)}\right| \leq \frac{|\lambda|(E_r)}{m(E_r)} \leq \frac{|\lambda|\big(B(x,r)\big)}{\alpha m\big(B(x,r)\big)}$$

Suponha, pois, λ medida positiva de Radon tal que $\lambda \perp m$. Seja A boreliano tal que $\lambda(A) = 0 = m(A^c)$. Queremos provar que, para todo $k \in \mathbb{N}$, pondo:

$$F_k \doteq \{x \in A | \limsup_{r\to 0} \frac{\lambda\big(B(x,r)\big)}{m\big(B(x,r)\big)} > \frac{1}{k}\}$$

tem-se $m(F_k) = 0$ (pois (5) vale no complementar de $A^c \cup \cup_{k\in\mathbb{N}} F_k$).

Como λ é de Radon, dado $\epsilon > 0$, existe U_ϵ aberto tal que $A \subset U_\epsilon$ e $\lambda(U_\epsilon) < \epsilon$. Para cada $x \in F_k$, escolha $B_x \subset U_\epsilon$ bola aberta centrada em x tal que $\lambda(B_x) > \frac{1}{k}\, m(B_x)$. Seja $V_\epsilon \doteq \cup_{x\in F_k} B_x$, de modo que $F_k \subset V_\epsilon \subset U_\epsilon$. Se $c < m(V_\epsilon)$, pelo corolário do lema de cobertura de Wiener, podemos escolher uma subcoleção finita $(B_i)_{1\leq i\leq N}$ de bolas disjuntas de $(B_x)_{x\in F_k}$ tal que $\sum_{i=1}^N m(B_i) > 3^{-n}c$. Portanto:

$$c < 3^n \sum_{i=1}^N m(B_i) \leq k3^n \sum_{i=1}^N \lambda(B_i) = k3^n \lambda(\dot{\bigcup_{i=1}^N} B_i) \leq k3^n \lambda(U_\epsilon) < k3^n\epsilon$$

donde $m(V_\epsilon) < k3^n\epsilon$, o que implica $m(F_k) < k3^n\epsilon$. Pela arbitrariedade de ϵ, segue-se $m(F_k) = 0$, como afirmado.

□