MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 2 (16/3)`

I) Aplicações Mensuráveis (continuação)

PROPOSIÇÃO 1. Sejam (X, τ_X), (Y, τ_Y) espaços topológicos e $\phi : X \to Y$ contínua. Então $\phi : (X, \mathcal{B}_X) \to (Y, \mathcal{B}_Y)$ é mensurável.

PROPOSIÇÃO 2 (σ-álgebra induzida por uma família de aplicações). Sejam X um conjunto, $(Y_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de espaços mensuráveis e $(X \xrightarrow{f_\alpha} Y_\alpha)_{\alpha \in A}$. Então existe uma menor σ-álgebra $\mathcal{M}$ em X que torna, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, f_α mensurável. Além disso, se $(\forall \alpha \in A) \mathcal{A}_\alpha = \sigma(S_\alpha)$, $\mathcal{M} = \sigma\big(\{V \subset X : \exists \alpha \in A, \exists D \in S_\alpha, V = f_\alpha^{-1}(D)\}\big)$.

DEFINIÇÃO 1. A menor σ-álgebra cuja existência é assegurada pela proposição acima chama-se *σ-álgebra induzida pela família* $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$.

PROPOSIÇÃO 3. Com a notação da definição e proposição acima, sejam, $(Z, \mathcal{C})$ espaço mensurável e $\phi : Z \to Y$

$$(Z, \mathcal{C}) \xrightarrow{\phi} (X, \mathcal{B}) \xrightarrow{f_\alpha} (Y_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$$

Então $\phi : (Z, \mathcal{C}) \to (X, \mathcal{B})$ é mensurável ***see*** $(\forall \alpha \in A)$ $f_\alpha \circ \phi$ for mensurável.

Casos Particulares:

σ-álgebra produto: Seja $(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de espaços mensuráveis. Em $X = \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ consideramos a σ-álgebra induzida pela família $(\mathrm{pr}_\alpha : X \to Y_\alpha)_{\alpha \in A}$, a qual chamamos de σ-álgebra produto e denotamos por $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha$.

OBSERVAÇÃO. Na situação acima, suponha que, para cada $\alpha \in A$, $D_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$. É verdade que $\Pi_{\alpha \in A} D_\alpha \in \otimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha$? Em geral, não. Se A for enumerável, sim: neste caso, basta observar que $\Pi_{\alpha \in A} D_\alpha = \cap_{\alpha \in A} \mathrm{pr}_\alpha^{-1}(D_\alpha)$ é uma interseção enumerável de mensuráveis.

PROPOSIÇÃO 4. Com a notação acima, se A for enumerável, o conjunto $\{\Pi_{\alpha \in A} D_\alpha : \forall \alpha, D_\alpha \in \mathcal{A}\}$ gera $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha$.

PROPOSIÇÃO 5. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Mais geralmente, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \otimes_{1 \le i \le n} \mathcal{B}_\mathbb{R}$

OBSERVAÇÃO. Mais geralmente, sejam $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de espaços topológicos e $X = \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ com a topologia produto. Tem-se:

1. $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{B}_{X_\alpha} \subset \mathcal{B}_X$
2. Vale a outra inclusão se A enumerável e $(\forall \alpha \in A)\tau_\alpha$ tiver base enumerável (ou, equivalentemente, se a topologia produto tiver base enumerável).

Pullback: Seja $(Y, \mathcal{A})$ espaço mensurável e $f : X \to Y$. A σ-ágebra em X induzida por $\{f\}$ chama-se *pullback* de $\mathcal{A}$ e é denotada por f^*A.

Note que $f^*A = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{A}\}$.

Caso particular: suponha $X \subset Y$ e $f = i$ a inclusão de X em Y. O *pullback* $i^*\mathcal{A}$ coincide com $\{B \cap X : B \in \mathcal{A}\}$ e é chamado de *restrição* ou *traço* de $\mathcal{A}$ em X, denotado por $\mathcal{A}|_X$. Em particular, se $X \in \mathcal{A}$, então $\mathcal{A}|_X = \{B \in \mathcal{A} | B \subset X\}$.

PROPOSIÇÃO 6. Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável e $f, g : X \to \mathbb{C}$ mensuráveis. Então fg e $f + g$ são mensuráveis.

II) Medidas

Definição 2. Seja X um conjunto, $\emptyset \in S \subset \mathbb{P}(X)$.

(i) Uma *medida em S* é uma função de conjunto σ-aditiva $\mu : S \to [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Uma *medida finitamente aditiva em S* é uma função de conjunto finitamente aditiva $\mu : S \to [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$

Exemplo 1.

1. Sejam X conjunto, $\mathcal{M} = 2^X$ e $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ dada por $\mu(A) \doteq |A|$ se A finito e $\mu(A) = \infty$ caso contrário. Então μ é uma medida, chamada *medida de contagem* em X. Qualquer restrição de μ também é chamada pelo mesmo nome.
2. Sejam X conjunto, $\mathcal{M} = 2^X$, $x_0 \in X$ e $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ dada por $\mu(A) \doteq 1$ se $x_0 \in A$ $\mu(A) = 0$ caso contrário. Então μ é uma medida, chamada *medida de Dirac* centrada em x_0, a qual se denota por δ_{x_0}. Qualquer restrição de δ_{x_0} também é chamada pelo mesmo nome.

Definição 3. Seja $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável e $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ medida. A terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ chama-se *espaço de medida*. Diz-se que μ é:

(i) *semi-finita* se $\forall A \in \mathcal{A} | \mu(A) = \infty, \exists B \in \mathcal{A} | B \subset A$ e $0 < \mu(B) < \infty$

(ii) *σ-finita* se $\exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec A$ tal que

$$\begin{cases} (\forall n)\ \mu(A_n) < \infty \\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X \end{cases}$$

(iii) *finita* se $\mu(X) < \infty$

(iv) *de probabilidade* se $\mu(X) = 1$

- <u>Observação</u>: É claro que (iv)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(ii). Também vale (ii)$\Rightarrow$(i).
- Mais gerlamente, dado $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida e $A \in \mathcal{A}$, diz-se que <u>A é σ-finito com respeito a μ</u> se A puder ser coberto por uma reunião enumerável de mensuráveis de medida finita.