

MAT 5798 – Medida e Integração

IME – 2017

<http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798>

Notas da Aula 19 (18/5)

I) **Diferenciação em Espaços Euclidianos** Sejam m a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n e $\nu \ll m$ uma medida com sinal ou complexa. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, seja

$$F(x) \doteq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{m(B(x, r))} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} \frac{d\nu}{dm} dm$$

definida para x tal que o limite acima existe. Gostaríamos de investigar a relação entre F e a derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\nu}{dm}$. Por exemplo, se $\frac{d\nu}{dm}$ for uma função contínua em \mathbb{R}^n , então $F = \frac{d\nu}{dm}$. O teorema de diferenciação de Lebesgue, a ser enunciado e provado logo mais, afirma que, se ν for uma medida de Radon (o que é equivalente a ser $\frac{d\nu}{dm}$ uma função *localmente integrável*, i.e. integrável em cada compacto de \mathbb{R}^n), então F coincide com $\frac{d\nu}{dm}$ m -quase sempre. Isso pode ser interpretado como uma formulação abstrata do Teorema Fundamental do Cálculo: dada uma função localmente integrável f em \mathbb{R}^n , a derivada da “integral indefinida” $f dm$ com respeito à medida de Lebesgue m coincide com a própria f .

Notação: Dada B bola aberta em \mathbb{R}^n , denotaremos por \hat{B} a bola aberta concêntrica a B e com raio igual a 3 vezes o de B .

TEOREMA 1 (lema de cobertura de Wiener). Sejam K um compacto de \mathbb{R}^n e $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de K . Então existe uma subcoleção finita $(B_i)_{1 \leq i \leq N}$ de $(B_\alpha)_\alpha$ formada por bolas disjuntas e tal que $(\hat{B}_i)_{1 \leq i \leq N}$ cobre K .

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor, pela compacidade de K , A finito. Tome B_1 uma bola em $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ de raio máximo. Assuma escolhidas B_1, \dots, B_N bolas abertas disjuntas de $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$. Se toda bola aberta de $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ intersectar $\cup_{i=1}^N B_i$, pare. Se não, escolha B_{N+1} uma bola aberta de $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ disjunta de $\cup_{i=1}^N B_i$ e de raio máximo. Como A é finito, para algum N suficientemente grande, o processo para, i.e. $(B_i)_{1 \leq i \leq N}$ é uma subcoleção de bolas abertas disjuntas tal que toda bola aberta de $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ intersecta $\cup_{i=1}^N B_i$. Seja B uma tal bola em $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$; tome i_0 o menor dos índices i tais que $B \cap B_i \neq \emptyset$. Então $B \cap \cup_{i=1}^{i_0-1} B_i = \emptyset$, de modo que, pela construção de $(B_i)_i$, o raio de B é menor ou igual ao de B_{i_0} , donde $B \subset \hat{B}_{i_0}$. Portanto, $\cup_{\alpha \in A} B_\alpha \subset \cup_{1 \leq i \leq N} \hat{B}_i$, donde $K \subset \cup_{1 \leq i \leq N} \hat{B}_i$. \square

COROLÁRIO 1. Seja $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma coleção de bolas abertas em \mathbb{R}^n e $c \in \mathbb{R}$ tal que $m(\cup_{\alpha \in A} B_\alpha) > c$. Então existe uma subcoleção finita $(B_i)_{1 \leq i \leq N}$ de $(B_\alpha)_\alpha$ formada por bolas disjuntas e tal que $m(\cup_{1 \leq i \leq N} B_i) > 3^{-n}c$.

Demonstração. Como $U \doteq \cup_{\alpha \in A} B_\alpha$ é \mathcal{L} -mensurável (pois é aberto), sabemos que $m(U) = \sup\{m(K) | K \subset\subset U\}$, c.f. notas da aula 13. Tome, pois, $K \subset\subset U$ tal que $m(K) > c$. Da cobertura por bolas abertas $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ do compacto K , podemos encontrar, pelo lema de cobertura de Wiener, uma subcoleção finita $(B_i)_{1 \leq i \leq N}$ de $(B_\alpha)_\alpha$ formada por bolas disjuntas e tal que $(\hat{B}_i)_{1 \leq i \leq N}$ cobre K . Então $c < m(K) \leq m(\cup_{i=1}^N \hat{B}_i) \leq \sum_{i=1}^N m(\hat{B}_i) = 3^n \sum_{i=1}^N m(B_i) = 3^n m(\cup_{1 \leq i \leq N} B_i)$, donde a tese. \square

DEFINIÇÃO 1. Seja f uma função em \mathbb{R}^n , Lebesgue-mensurável, a valores em \mathbb{C} ou em $\overline{\mathbb{R}}$. Diz-se que f é *localmente integrável* (NOTAÇÃO: $f \in L^1_{\text{loc}}(m)$) se, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, $\int_K |f| dm < \infty$.

Para $f \in L^1_{\text{loc}}(m)$ e $A \in \mathcal{L}^n$ tal que $m(A) > 0$, definimos a *média de f em A* :

$$\int_A f dm \doteq \frac{1}{m(A)} \int_A f dm$$

PROPOSIÇÃO 1. Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(m)$. Como função de $(x, r) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, a média $\int_{B(x, r)} f dm$ é uma função contínua.

Demonstração. É claro que $(x, r) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \mapsto m(B(x, r))$ é contínua. A continuidade de $(x, r) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \mapsto \int_{B(x, r)} f dm$ é um corolário do teorema da convergência dominada, deixado como exercício; note que, se $(x_n, r_n) \rightarrow (x, r)$, $\chi_{B(x_n, r_n)}$ converge pontualmente para $\chi_{B(x, r)}$ exceto, possivelmente, nos pontos da esfera $S(x, r)$, i.e. a convergência se dá m -quase sempre. \square

COROLÁRIO 2. Com a notação acima, dada $f \in L^1_{\text{loc}}(m)$, a função $Hf : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ dada por $Hf(x) \doteq \sup\{\int_{B(x, r)} |f| dm | r > 0\}$ é semicontínua inferiormente; em particular, é boreliana.

Demonstração. Se X é um espaço topológico e $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma família de funções semicontínuas inferiormente $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, então $f \doteq \sup_{\alpha \in A} f_\alpha$ é semicontínua inferiormente. Com efeito, $(\forall r \in \mathbb{R}) f^{-1}((r, \infty]) = \cup_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}((r, \infty])$ é uma união de abertos, portanto é aberto. \square

DEFINIÇÃO 2. Com a notação do corolário acima, $H : f \in L^1_{\text{loc}}(m) \mapsto Hf$ chama-se *operador maximal de Hardy-Littlewood* e Hf a função maximal de Hardy-Littlewood associada a f .

O operador definido acima intervém, conforme veremos, no teorema de diferenciação de Lebesgue, em vista da desigualdade provada abaixo. Este operador também intervém em outros teoremas de diferenciação, como o teorema de Rademacher, que possivelmente faremos ao final do curso.

TEOREMA 2 (desigualdade maximal de Hardy-Littlewood). Existe uma constante $C = C(n)$ (dependendo apenas da dimensão n de \mathbb{R}^n) tal que, para toda $f \in L^1(m)$ e para todo $\alpha > 0$, tem-se:

$$m(\{Hf > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_1$$

Demonstração. Sejam $\alpha > 0$ e $c < m(\{Hf > \alpha\})$. Para cada $x \in \{Hf > \alpha\}$, podemos escolher $r_x > 0$ tal que $\int_{B(x, r_x)} |f| dm > \alpha$. Como $\{B(x, r_x)\}_{x \in \{Hf > \alpha\}}$ cobre $\{Hf > \alpha\}$, obtém-se $c < m(\cup_{x \in \{Hf > \alpha\}} B(x, r_x))$. Portanto, pelo corolário 1, podemos extrair uma subcoleção finita $\{B_i \doteq B(x_i, r_i)\}_{1 \leq i \leq N}$ de $\{B(x, r_x)\}_{x \in \{Hf > \alpha\}}$ formada por bolas abertas disjuntas e tal que $\sum_{i=1}^N m(B_i) > 3^{-n}c$. Daí:

$$c < 3^n \sum_{i=1}^N m(B_i) < 3^n \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha} \int_{B_i} |f| dm = \frac{3^n}{\alpha} \int_{\dot{\cup}_{i=1}^N B_i} |f| dm \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_1$$

Como c tal que $c < m(\{Hf > \alpha\})$ foi tomado arbitrariamente, obtém-se a tese com $C = 3^n$. □

TEOREMA 3 (teorema de diferenciação de Lebesgue, versão 1). Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(m)$, onde m é a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n . Então, para m -quase todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x, r)} f dm \quad (1)$$

Demonstração. 1) Redução: podemos supor $f \in L^1$. Com efeito, basta provar que, para todo $R > 0$, $\{x \in B(0, R) \mid \text{vale (1)}\}$ tem medida nula. Para tal, podemos substituir f por $\chi_{B(0, R+1)} \cdot f \in L^1$ sem alterar as médias nas bolas de raio 1 centradas em pontos de $B(0, R)$, de modo que, para esses pontos, a existência e o valor do limite no segundo membro de (1) não se altera, nem tampouco o valor de f nos tais pontos.

2) A igualdade (1) vale, trivialmente, em todos os pontos de \mathbb{R}^n se f for contínua.

3) Sejam $f \in L^1(m)$. Provemos que, para m -quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\limsup_{r \rightarrow 0} |\int_{B(x, r)} f dm - f(x)| = 0$, o que é equivalente a (1). Para tal, basta verificar que, para todo $\alpha > 0$, $E_\alpha \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{r \rightarrow 0} |\int_{B(x, r)} f dm - f(x)| > \alpha\}$ tem medida de Lebesgue zero; pois, nesse caso, (1) vale no complementar do conjunto nulo $\cup_{n \in \mathbb{N}} E_{1/n}$. Fixe, pois, $\alpha > 0$. Dado $\epsilon > 0$, tome $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_1 < \epsilon$ (existe, pois $C_c(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^1(m)$, c.f. notas da aula 13). Dado $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se, $\forall r > 0$, $|\int_{B(x, r)} f dm - f(x)| \leq |\int_{B(x, r)} (f - g) dm| + |\int_{B(x, r)} g dm - g(x)| + |g(x) - f(x)|$, de modo que:

$$\limsup_{r \rightarrow 0} |\int_{B(x, r)} f dm - f(x)| \leq H(f - g)(x) + 0 + |g(x) - f(x)|$$

e daí se conclui que $E_\alpha \subset \{H(f - g) > \frac{\alpha}{2}\} \cup \{|g - f| > \frac{\alpha}{2}\}$. Portanto, pela desigualdade maximal de Hardy-Littlewood:

$$m(E_\alpha) \leq m(\{H(f - g) > \frac{\alpha}{2}\}) + m(\{|g - f| > \frac{\alpha}{2}\}) \leq \frac{2C}{\alpha} \epsilon + \frac{2}{\alpha} \epsilon$$

o que implica, pela arbitrariedade do ϵ tomado, $m(E_\alpha) = 0$, como afirmado. □