MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 18 (16/5)`

I) Medidas com Sinal (continuação).

I.1) Propriedades da Derivada de Radon-Nikodym

Proposição 1 (regra da soma). Sejam μ medida positiva, ν_1 e ν_2 medidas com sinal em $(X, \mathcal{M})$, todas σ-finitas. Se $\nu_1 \ll \mu$ e $\nu_2 \ll \mu$, e se $\nu_1 + \nu_2$ estiver definida, então $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$ e $\frac{\mathrm{d}(\nu_1+\nu_2)}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu} + \frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu}$ μ-quase sempre.

Demonstração. A primeira afirmação é imediata; quanto à segunda, basta observar que, $\forall E \in \mathcal{M}$:

$$\int_E \frac{\mathrm{d}(\nu_1+\nu_2)}{\mathrm{d}\mu}\,\mathrm{d}\mu = (\nu_1+\nu_2)(E) = \nu_1(E) + \nu_2(E) = \int_E \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu}\,\mathrm{d}\mu + \int_E \frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu}\,\mathrm{d}\mu = \int_E \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu} + \frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu}\,\mathrm{d}\mu,$$

e a tese segue da unicidade da derivada de Radon-Nikodym. □

Proposição 2 (regra da cadeia). Sejam μ, λ medidas positivas, ν medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$, todas σ-finitas. Suponha $\nu \ll \mu \ll \lambda$. Então:

i) $\forall g \in \mathsf{L}^+$, $\int g\,\mathrm{d}\mu = \int g\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$. Consequentemente, $\forall g : X \to \mathbb{C}$:

  1) $g \in \mathsf{L}^1(\mu) \Leftrightarrow g\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} \in \mathsf{L}^1(\lambda)$ e, caso afirmativo, vale a mesma igualdade entre as integrais.

  2) $g \in \mathsf{L}^1(\nu) \Leftrightarrow g\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \in \mathsf{L}^1(\mu)$ e, caso afirmativo, $\int g\,\mathrm{d}\nu = \int g\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\,\mathrm{d}\mu$.

ii) $\nu \ll \lambda$ e $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ λ-quase sempre.

Demonstração. Para $g \in \mathsf{L}^+$, a igualdade $\int g\,\mathrm{d}\mu = \int g\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$ vale se g for uma função característica, pela definição da derivada de Radon-Nikodym. Por aditividade, também deve valer se g for uma função simples positiva. Finalmente, para g mensurável positiva qualquer, basta tomar uma sequência crescente de funções simples positivas $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que convirja pontualmente para g; então $(\phi_n\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente em L^+ e $\phi_n\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} \to g\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$, de modo que, pelo teorema da convergência monótona:

$$\int g\,\mathrm{d}\mu = \lim \int \phi_n\,\mathrm{d}\mu = \lim \int \phi_n \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \int g\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Isso prova a afirmação i). A afirmação i.1) é um corolário, aplicando-se a igualdade acima para as funções positivas $(\mathrm{Re}\, g)^{\pm}$ e $(\mathrm{Im}\, g)^{\pm}$. A afirmação i.2), por sua vez, é corolário de i.1) aplicado a $\nu^+ \ll \mu$ e $\nu^- \ll \mu$, lembrando que $\mathsf{L}^1(\nu) = \mathsf{L}^1(\nu^+) \cap \mathsf{L}^1(\nu^-)$ e, $\forall g \in \mathsf{L}^1(\nu)$, $\int g\,\mathrm{d}\nu = \int g\,\mathrm{d}\nu^+ - \int g\,\mathrm{d}\nu^-$.

Quanto à afirmação ii), é claro que $\nu \ll \lambda$; e, para todo $E \in \mathcal{M}$, segue de i) que $\int_E \mathrm{d}\nu^+ = \int_E \frac{\mathrm{d}\nu^+}{\mathrm{d}\mu}\,\mathrm{d}\mu = \int_E \frac{\mathrm{d}\nu^+}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$, de modo que, pela unicidade da derivada de Radon-Nikodym, $\frac{\mathrm{d}\nu^+}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\nu^+}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ λ-quase sempre. Afirmação análoga vale para ν^- e, como $\nu = \nu^+ - \nu^-$, obtém-se a tese com uma aplicação da regra da soma. □

Corolário 1. Sejam μ, λ medidas positivas e σ-finitas em $(X, \mathcal{M})$, tais que $\mu \ll \lambda$ e $\lambda \ll \mu$. Então $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu} = 1$ quase sempre (com respeito a λ ou μ).

Demonstração. Aplique o corolário anterior com $\mu \ll \lambda \ll \mu$, notando que $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mu} = 1$. □

I.2) Medidas Complexas

Definição 1 (medidas complexas). Uma *medida complexa* μ num espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$ é uma aplicação $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ tal que:

mc.i) $\mu(\emptyset) = 0$.

mc.ii) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\!\cdot\, \mathcal{M}$, $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$, com o significado de que, no segundo membro, a série é absolutamente convergente (i.e. a integral com respeito à medida de contagem existe) e sua soma é igual ao primeiro membro.

Exemplo 1: Se μ for uma medida positiva em $\mathcal{M}$ e $f : X \to \mathbb{C}$ for μ-integrável, $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ dada por $E \mapsto \int f\,\mathrm{d}\mu$ é uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$. Notação: $\nu = f\,\mathrm{d}\mu$.

Observação. É imediato verificar que, se μ for uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$, $\mu_r \doteq \operatorname{Re} \mu$ e $\mu_i \doteq \operatorname{Im} \mu$ são medidas com sinal finitas em $(X, \mathcal{M})$, o que nos permite generalizar para medidas complexas a teoria desenvolvida nas seções anteriores, conforme descrito nos teoremas abaixo.

Definição 2. Sejam ν, λ medidas complexas e μ medida positiva em $(X, \mathcal{M})$. Diz-se que:

i) ν e λ são mutuamente singulares (notação: $\nu \perp \lambda$) se $\nu_a \perp \lambda_b$ para $a, b = r, i$.

ii) ν é absolutamente contínua com respeito a μ (notação: $\nu \ll \mu$) se $\nu_a \ll \mu$ para $a = r, i$.

Definição 3. Seja ν medida complexa em $(X, \mathcal{M})$. $\mathsf{L}^1(\nu) \doteq \mathsf{L}^1(\nu_r) \cap \mathsf{L}^1(\nu_i)$. Se $f \in \mathsf{L}^1(\nu)$,

$$\int f \, \mathrm{d}\nu \doteq \int f \, \mathrm{d}\nu_r + i \int f \, \mathrm{d}\nu_i.$$

Teorema 1. Sejam ν medida complexa e μ medida positiva σ-finita em $(X, \mathcal{M})$.

1. (Teorema de Decomposição de Lebesgue) Existem únicas medidas complexas ν_a e ν_s em $(X, \mathcal{M})$ tais que $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$ e $\nu = \nu_a + \nu_s$.

2. (Teorema de Radon-Nikodym) Se $\nu \ll \mu$, existe $f : X \to \mathbb{C}$ μ-integrável tal que $\nu = f \, \mathrm{d}\mu$. Tal função é única, no sentido de que, se g for outra função com a mesma propriedade, então $g = f$ quase sempre com respeito a μ.

Definição 4. Com a notação do teorema acima:

1. ν_a e ν_s chamam-se, respectivamente, *parte absolutamente contínua* e *parte singular* de ν com respeito a μ.

2. f chama-se *derivada de Radon-Nikodym* de ν com respeito a μ e denota-se por $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

Demonstração. Basta aplicar a versão do teorema para medidas com sinal aos pares $(\operatorname{Re} \nu, \mu)$ e $(\operatorname{Im} \nu, \mu)$. Ponha $\nu_s \doteq (\operatorname{Re} \nu)_s + i(\operatorname{Im} \nu)_s$ e $\nu_a \doteq (\operatorname{Re} \nu)_a + i(\operatorname{Im} \nu)_a$, e $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \doteq \frac{\mathrm{d} \operatorname{Re} \nu}{\mathrm{d}\mu} + i \frac{\mathrm{d} \operatorname{Im} \nu}{\mathrm{d}\mu}$. Isso prova a existência, e a unicidade decorre da unicidade das partes reais e imaginárias enunciada na versão do teorema para medidas com sinal. □

Exercício:
Com a notação da definição e teorema acima, enuncie e verifique generalizações das regras da soma e da cadeia para a derivada de Radon-Nikodym, c.f. proposições 1 e 2.

I.2.1 Variação total de uma medida complexa

Seja ν medida complexa em $(X, \mathcal{M})$. Tome μ medida positiva em $(X, \mathcal{M})$ tal que $\nu \ll \mu$ (existe; por exemplo, $\mu = |\operatorname{Re} \nu| + |\operatorname{Im} \nu|$). Pelo teorema de Radon-Nikodym, $\nu = f \, \mathrm{d}\mu$, onde $f \in \mathsf{L}^1(\mu)$ é a derivada de Radon-Nikodym de ν com respeito a μ. Definimos:

$$|\nu| \doteq |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Verifiquemos que isto é uma boa definição, i.e. não depende da medida positiva μ tomada. Com efeito, suponha que μ' seja outra medida postivia em $(X, \mathcal{M})$ tal que $\nu \ll \mu'$, de modo que $\nu = f' \, \mathrm{d}\mu'$. Seja $\lambda \doteq \mu + \mu'$, de modo que $\mu \ll \lambda$ e $\mu' \ll \lambda$. Segue da regra da cadeia que $\nu \ll \lambda$ e:

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda} = f \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} = f' \frac{\mathrm{d}\mu'}{\mathrm{d}\lambda}$$

λ-quase sempre, de modo que $|f| \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} = |f'| \frac{\mathrm{d}\mu'}{\mathrm{d}\lambda}$ λ-quase sempre. Portanto, novamente pela regra da cadeia:

$$|f| \, \mathrm{d}\mu = |f| \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} \, \mathrm{d}\lambda = |f'| \frac{\mathrm{d}\mu'}{\mathrm{d}\lambda} \, \mathrm{d}\lambda = |f'| \, \mathrm{d}\mu'$$

o que prova a afirmação de que $|\nu|$ está bem definida.

Definição 5 (variação total). Com a notação acima, a medida positiva $|\nu|$ chama-se *variação total* de ν.

Observação. Se ν for uma medida com sinal finita, a definição acima coincide com a definição prévia de variação total, i.e. $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$. Com efeito, se (P, N) for uma decomposição de Hahn para ν, já vimos que $\nu = (\chi_P - \chi_N) \, \mathrm{d}(\nu^+ + \nu^-)$, e basta observar que $|\chi_P - \chi_N| = 1$.

Proposição 3 (propriedades da variação total). Seja ν uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$.

a) $\forall E \in \mathcal{M}$, $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$.

b) $\nu \ll |\nu|$ e $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}|\nu|}$ tem valor absoluto 1 quase sempre com respeito a $|\nu|$.

c) $\mathsf{L}^1(\nu) = \mathsf{L}^1(|\nu|)$ e, para toda $f \in \mathsf{L}^1(\nu)$, $|\int f \, \mathrm{d}\nu| \leq \int |f| \, \mathrm{d}|\nu|$.

d) Se λ for outra medida complexa em $(X, \mathcal{M})$, então $|\nu + \lambda| \leq |\nu| + |\lambda|$.