MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 17 (11/5)`

I) Medidas com Sinal (continuação).

I.1) O teorema de Radon-Nikodym.

Definição 1. Sejam ν medida com sinal e μ medida positiva em $(X, \mathcal{M})$. Diz-se que ν é *absolutamente contínua* com respeito a μ (notação: $\nu \ll \mu$) se $\forall E \in \mathcal{M}$, $\nu(E) = 0$ sempre que $\mu(E) = 0$.

No caso em que ν é finita, a condição acima corresponde, de fato, a uma ideia de "continuidade", no sentido da proposição abaixo:

Proposição 1. Sejam ν medida com sinal finita e μ medida positiva em $(X, \mathcal{M})$. Então $\nu \ll \mu$ *see* $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, se $E \in \mathcal{M}$ e $\mu(E) < \delta$, então $|\nu(E)| < \epsilon$.

Demonstração. $(\Leftarrow)$ é imediata.

$(\Rightarrow)$ Redução: basta provar o caso em que ν é positiva. A redução decorre de: (i) $(\forall E \in \mathcal{M})|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$ e (ii) $\nu \ll \mu$ *see* $|\nu| \ll \mu$ (verifique).

Seja, pois, ν medida positiva finita tal que $\nu \ll \mu$. Suponha, por contradição, que exista $\epsilon > 0$ tal que, $\forall \delta > 0$, $\exists E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) < \delta$ e $\nu(E) \geq \epsilon$. Pondo $\delta = 2^{-n}$, obtém-se uma sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})\mu(E_n) < 2^{-n}$ e $\nu(E_n) \geq \epsilon$. Tome $E \doteq \limsup E_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} E_k \in \mathcal{M}$. Então $\mu(E) = 0$ (pois, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(\cup_{k\geq n} E_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \leq 2^{-k+1}$), mas $\nu(E) \geq \epsilon$ (pois, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\nu(\cup_{k\geq n} E_k) \geq \epsilon$, donde, pela continuidade para baixo, $\nu(\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} E_k) = \lim_{n\to\infty} \nu(\cup_{k\geq n} E_k) \geq \epsilon$). Isso contradiz $\nu \ll \mu$, donde a tese. □

Corolário 1. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f \in \mathsf{L}^1(\mu)$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $E \in \mathcal{M}$ e $\mu(E) < \delta$, então $|\int_E f \, \mathrm{d}\mu| < \epsilon$.

Demonstração. Basta observar que $\nu \doteq |f| \, \mathrm{d}\mu$ é uma medida positiva finita e $\nu \ll \mu$; aplique a proposição anterior e a desigualdade triangular. □

Observação. Alguma motivação para o teorema de Radon-Nikodym:

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e crescente. Pelo que vimos na primeira parte do curso, f induz uma medida de Lebesgue-Stieltjes $\mu_f : \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0, \infty]$. Note que, $\forall a < b \in \mathbb{R}$:

$$\mu_f\big((a, b]\big) = f(b) - f(a) \overset{TFC}{=} \int_a^b f'(x) \, \mathrm{d}x = \int_{(a,b]} f' \, \mathrm{d}m,$$

   de modo que as medidas μ_f e $f' \, \mathrm{d}m$ coincidem em todo h-intervalo limitado. Isso implica, conforme já vimos quando da discussão das medidas de Lebesgue-Stieltjes, $\mu_f = f' \, \mathrm{d}m$. Se μ_f for uma medida de probabilidade, f' chama-se *densidade de probabilidade* da medida de probabilidade em questão.

2. Tendo em vista o que foi exposto no item anterior, gostaríamos de investigar condições sob as quais uma medida boreliana na reta é da forma $f \, \mathrm{d}m$, com f boreliana positiva. Ou, num contexto mais abstrato, dado $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida, gostaríamos de caracterizar as medidas em $\mathcal{M}$ da forma $f \, \mathrm{d}\mu$, com $f \in \mathsf{L}^+$. É claro que, se uma medida ν for dessa forma, então $\nu \ll \mu$. No caso em que μ é σ-finita, vale a recíproca; este é o conteúdo do teorema de Radon-Nikodym, abaixo.

Lema 1. Se μ e ν forem medidas positivas finitas no espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$, então $\mu \perp \nu$ ou existem $\epsilon > 0$ e $E \in \mathcal{M}$ tais que $\mu(E) > 0$ e E é positivo para a medida com sinal $\nu - \epsilon\mu$.

Demonstração. Seja $(\forall k \in \mathbb{N})\lambda_k \doteq \nu - \frac{1}{k}\mu$. Então $(\forall k)\lambda_k$ é uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$; tome (P_k, N_k) decomposição de Hahn para λ_k. Como $(\forall k \in \mathbb{N})\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$, podemos supor $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ crescente. Tome $P \doteq \cup_{k\in\mathbb{N}} P_k \in \mathcal{M}$ e $N \doteq \cap_{k\in\mathbb{N}} N_k \in \mathcal{M}$, de modo que $P \dot\cup N = X$. Então, para todo mensurável $E \subset N$, $(\forall k \in \mathbb{N})\nu(E) - \frac{1}{k}\mu(E) \leq 0$, i.e. $\nu(E) \leq \frac{1}{k}\mu(E)$; como μ é finita, isso implica $\nu(E) = 0$, portanto N é nulo para ν. Se P for nulo para μ, então $\mu \perp \nu$; caso contrário, existe um mensurável $\tilde{E} \subset P$ tal que $\mu(\tilde{E}) > 0$. Como $\tilde{E}$ é a união da sequência crescente $(\tilde{E} \cap P_k)_{k\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$, usando a continuidade para cima da medida μ conclui-se que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $E \doteq \tilde{E} \cap P_{k_0}$ tem medida $\mu(E) > 0$; e, sendo $E \subset P_{k_0}$, E é positivo para $\lambda_{k_0} = \nu - \frac{1}{k_0}\mu$, obtendo-se a segunda alternativa da tese com $\epsilon = 1/k_0$. □

Teorema 1. Sejam ν medida com sinal e μ medida positiva em $(X,\mathcal{M})$, ambas σ-finitas.

1. (Teorema de Decomposição de Lebesgue) Existem únicas medidas com sinal ν_a e ν_s em $(X,\mathcal{M})$ tais que $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$ e $\nu = \nu_a + \nu_s$. Além disso, ν_a e ν_s são σ-finitas.

2. (Teorema de Radon-Nikodym) Se $\nu \ll \mu$, existe $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-quase integrável tal que $\nu = f\,\mathrm{d}\mu$. Tal função é única, no sentido de que, se g for outra função com a mesma propriedade, então $g = f$ quase sempre com respeito a μ.

Definição 2. Com a notação do teorema acima:

1. ν_a e ν_s chamam-se, respectivamente, *parte absolutamente contínua* e *parte singular* de ν com respeito a μ.

2. f chama-se *derivada de Radon-Nikodym* de ν com respeito a μ e denota-se por $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

Observação.

1. As partes 1. e 2. do teorema são, em geral, enunciadas em teoremas distintos; foram aglutinadas aqui num único teorema porque a demonstração que faremos permite prová-las conjuntamente.

2. O teorema de Radon-Nikodym admite uma generalização: sem a σ-finitude de ν, i.e. dadas μ medida positiva σ-finita e ν medida com sinal (não necessariamente σ-finita) tal que $\nu \ll \mu$, garante-se a existência e unicidade μ-quase sempre da derivada de Radon-Nikodym. A unicidade depende do lema proposto no exercício abaixo. A existência será provada no exercício 14 da seção 3.2. Vide também o exercício 15 da mesma seção, no qual se substitui a σ-finitude de μ pela hipótese de ser μ uma medida *decomponível* (c.f. definição dada no referido exercício).

   Exercício:
   Sejam $(X,\mathcal{M},\mu)$ espaço de medida σ-finito e $f,g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ quase integráveis e tais que $(\forall E \in \mathcal{M}) \int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E g\,\mathrm{d}\mu$. Então $f = g$ μ-quase sempre.

Demonstração do teorema 1. i) Suponha, inicialmente, ν e μ positivas e finitas. Considere $\mathcal{F} \doteq \{f : X \to [0,\infty]$ mensurável $|(\forall E \in \mathcal{M}) \int_E f\,\mathrm{d}\mu \le \nu(E)\}$.

Ideia: Alguma motivação para o argumento subsequente: suponha que existam ν_s medida com sinal mutuamente singular com μ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-quase integrável tais que $\nu = \nu_s + f\,\mathrm{d}\mu$. Então, como ν é uma medida positiva e finita, conclui-se que ν_s também o é e f é positiva μ-quase sempre, de modo que podemos assumi-la positiva, alterando-a num conjunto μ-nulo se necessário. Portanto, $(\forall E \in \mathcal{M})\nu(E) = \nu_s(E) + \int_E f\,\mathrm{d}\mu \ge \int_E f\,\mathrm{d}\mu$. Além disso, para toda $g \in \mathsf{L}^+$ tal que $(\forall E \in \mathcal{M}) \int_E g\,\mathrm{d}\mu \le \nu(E)$, tem-se, tomando $X = S \dot\cup A$ decomposição de X em mensuráveis disjuntos com A nulo com respeito a ν_s e S nulo com respeito a μ, $(\forall E \in \mathcal{M}) \int_E g\,\mathrm{d}\mu = \int_{E\cap A} g\,\mathrm{d}\mu \le \nu(E\cap A) = \int_{E\cap A} f\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu$. Em particular, $\int_X g\,\mathrm{d}\mu \le \int_X f\,\mathrm{d}\mu$. Isso nos motiva a procurar f no conjunto $\mathcal{F}$ acima que tenha integral máxima com respeito a μ.

Note que $\mathcal{F} \ne \emptyset$, pois $0 \in \mathcal{F}$. Tome $m \doteq \sup\{\int_X f\,\mathrm{d}\mu | f \in \mathcal{F}\}$. Pela definição de $\mathcal{F}$, $m \le \nu(X) < \infty$. Afirmo que m é um máximo. Com efeito:

a) Se $f,g \in \mathcal{F}$, então $h \doteq \max\{f,g\} \in \mathcal{F}$. De fato, $h \in \mathsf{L}^+$ e, $\forall E \in \mathcal{M}$, $\int_E h\,\mathrm{d}\mu = \int_{\{f>g\}\cap E} h\,\mathrm{d}\mu + \int_{\{f\le g\}\cap E} h\,\mathrm{d}\mu = \int_{\{f>g\}\cap E} f\,\mathrm{d}\mu + \int_{\{f\le g\}\cap E} g\,\mathrm{d}\mu \le \nu\big(\{f>g\}\cap E\big) + \nu\big(\{f\le g\}\cap E\big) = \nu(E)$.

b) Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{F}$ tal que $\int_X g_n\,\mathrm{d}\mu \to m$. Defina $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $(\forall n) f_n \doteq \max\{g_1,\dots,g_n\}$. Então, pelo item anterior, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{F}$; além disso, $(f_n)_n$ é crescente e, como $(\forall n) g_n \le f_n$, por monotonicidade tem-se $(\forall n) \int_X g_n\,\mathrm{d}\mu \le \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \le m$. Portanto, $\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \to m$. Seja $f : X \to [0,\infty]$ dada por $(\forall x \in X) f(x) \doteq \lim f_n(x)$. Então f é mensurável e, pelo teorema da convergência monótona, $(\forall E \in \mathcal{M}) \int_E f\,\mathrm{d}\mu = \lim \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu \le \nu(E)$, portanto $f \in \mathcal{F}$. Pondo $E = X$ na última igualdade, obtém-se $\int_X f\,\mathrm{d}\mu = m$, de modo que m é um máximo, como afirmado.

Tome, pois, $f \in \mathcal{F}$ tal que $\int_X f\,\mathrm{d}\mu = m = \sup\{\int_X g\,\mathrm{d}\mu | g \in \mathcal{F}\}$. Defina $\nu_s \doteq \nu - f\,\mathrm{d}\mu$, e mostremos que $\nu_s \perp \mu$, o que provará a existência da decomposição de Lebesgue com ν_s e $\nu_a \doteq f\,\mathrm{d}\mu$.

Observe que ν_s é uma medida positiva finita em $(X,\mathcal{M})$, pois, $(\forall E \in \mathcal{M}) 0 \le \int_E f\,\mathrm{d}\mu \le \nu(E)$, uma vez que $f \in \mathcal{F}$, e daí $0 \le \nu_s \le \nu$. Suponha que ν_s não seja mutuamente singular com μ. Pelo lema 1, existe $\epsilon > 0$ e $E_0 \in \mathcal{M}$ tais que $\mu(E_0) > 0$ e E_0 é positivo para $\nu_s - \epsilon\mu$. Logo, pondo $F \doteq f + \epsilon\chi_{E_0}$, obtém-se F mensurável, positiva e tal que $(\forall E \in \mathcal{M}) \int_E F\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \epsilon\mu(E_0\cap E) = \int_{E\setminus E_0} f\,\mathrm{d}\mu + \big(\int_{E_0\cap E} f\,\mathrm{d}\mu + \epsilon\mu(E_0\cap E)\big) \le \nu(E\setminus E_0) + \nu(E_0\cap E) = \nu(E)$. Daí $F \in \mathcal{F}$ e $\int_X F\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \epsilon\mu(E) > \int_X f\,\mathrm{d}\mu = m$, o que contraria a maximalidade de m. Então $\nu_s \perp \mu$, como afirmado.

Provemos a unicidade da decomposição $\nu = \nu_s + \nu_a$ tal que $\nu_s \perp \mu$ e $\nu_a \ll \mu$. Se λ_s e λ_a também forem medidas com sinal em $(X, \mathcal{M})$ tais que $\nu = \lambda_s + \lambda_a$, $\lambda_s \perp \mu$ e $\lambda_a \ll \mu$, então $\lambda \doteq \nu_s - \lambda_s = \lambda_a - \nu_a$ é uma medida com sinal tal que $\lambda \perp \mu$ e $\lambda \ll \mu$ (verifique). Portanto, $\lambda = 0$, donde $\lambda_s = \nu_s$ e $\lambda_a = \nu_a$.

As medidas ν_s e ν_a são finitas, conforme já observado; em particular, são σ-finitas.

Finalmente, se $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ for μ-quase integrável e $\nu_a = g\,\mathrm{d}\mu$, então g é integrável (pois ν_a é finita) e $(\forall E \in \mathcal{M}) \int_E g\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu$, o que permite concluir, por um exercício proposto nas notas de aula 8, que $g = f$ quase sempre com respeito a μ. Caso $\nu \ll \mu$, a unicidade já demonstrada para a decomposição de Lebesgue implica $\nu_s = 0$ e $\nu = \nu_a = f\,\mathrm{d}\mu$, sendo f única μ-quase sempre, conforme acabamos de verificar.

Está concluída, portanto, a demonstração das partes 1. e 2. do teorema no caso em que ν e μ são positivas e finitas.

ii) Suponha, agora, ν e μ positivas e σ-finitas. Podemos tomar $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $X = \dot\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(X_n) < \infty$ e $\nu(X_n) < \infty$ (verifique). Tome, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\nu_n \doteq \nu \lrcorner X_n$ e $\mu_n \doteq \mu \lrcorner X_n$. Então $\forall n \in \mathbb{N}$, ν_n e μ_n são medidas positivas finitas em $(X, \mathcal{M})$, e $\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n$, $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$. Pela parte anterior da demonstração, para cada $n \in \mathbb{N}$: (i) existem únicas medidas (positivas e finitas) $\nu_{n,s}$ e $\nu_{n,a}$ em $(X, \mathcal{M})$ tais que $\nu_n = \nu_{n,s} + \nu_{n,a}$, $\nu_{n,s} \perp \mu_n$ e $\nu_{n,a} \ll \mu_n$; (ii) existe $f_n : X \to [0, \infty]$ mensurável tal que $\nu_{n,a} = f_n\,\mathrm{d}\mu_n$. Podemos supor, alterando f_n num conjunto μ_n-nulo, se necessário, que f_n se anula em X_n^c.

Pomos: $\nu_s \doteq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_{s,n}$, $\nu_a \doteq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_{a,n}$ e $f \doteq \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Portanto, ν_s e ν_a são medidas positivas e σ-finitas em $(X, \mathcal{M})$, e $f \in \mathsf{L}^+$. Verifique que $\nu_s \perp \mu$, $\nu_a \ll \mu$ e $\nu = \nu_s + \nu_a$. Além disso, usando-se o teorema da convergência monótona, conclui-se que $\nu_a = f\,\mathrm{d}\mu$ (verifique isso também).

Verifiquemos a unicidade da decomposição de Lebesgue. Suponha que $\nu = \lambda_s + \lambda_a$, com λ_a e λ_s medidas com sinal em $(X, \mathcal{M})$ e $\lambda_s \perp \mu$, $\lambda_a \ll \mu$.

Observação. Queremos mostrar que $\lambda_s = \nu_s$ e $\lambda_a = \nu_a$. O argumento da parte i) não se aplica diretamente, pois $\nu_s - \lambda_s$ pode não estar bem definida!

Tome $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ crescente tal que $\cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n = X$ e $(\forall n \in \mathbb{N}) \nu(Y_n)$ finito (o que é equivalente a serem $\nu^+(Y_n)$ e $\nu^-(Y_n)$ ambos finitos) e $\mu(Y_n) < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\nu \lrcorner Y_n = \nu_s \lrcorner Y_n + \nu_a \lrcorner Y_n$ e $\nu \lrcorner Y_n = \lambda_s \lrcorner Y_n + \lambda_a \lrcorner Y_n$ são ambas decomposições de Lebesgue para $\nu \lrcorner Y_n$ com respeito a $\mu \lrcorner Y_n$. Pela unicidade da decomposição de Lebesgue no caso em que as medidas são finitas, cf. parte i), conclui-se que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\nu_s \lrcorner Y_n = \lambda_s \lrcorner Y_n$ e $\nu_a \lrcorner Y_n = \lambda_a \lrcorner Y_n$. Usando a continuidade para cima das medidas, conclui-se que, $\forall E \in \mathcal{M}$: $\lambda_s(E) = \lim \lambda_s(E \cap Y_n) = \lim \nu_s(E \cap Y_n) = \nu_s(E)$, e analogamente se conclui que $\lambda_a = \nu_a$.

Quanto à unicidade de f, suponha que $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ seja μ-quase integrável e $\nu_a = g\,\mathrm{d}\mu$. Tomando $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ como acima, para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se $g\,\mathrm{d}(\mu \lrcorner Y_n) = f\,\mathrm{d}(\mu \lrcorner Y_n)$. Como $(\forall n \in \mathbb{N}) \mu \lrcorner Y_n$ é finita, conclui-se da parte i) que $g = f$ $\mu \lrcorner Y_n$-quase sempre; em particular, $A_n \doteq \{x \in Y_n | g(x) \neq f(x)\} \in \mathcal{M}$ é um conjunto μ-nulo. Então $N \doteq \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é um conjunto μ-nulo e $f = g$ em N^c.

Finalmente, se $\nu \ll \mu$, a unicidade da decomposição de Lebesgue permite concluir que $\nu_s = 0$ e $\nu = \nu_a = f\,\mathrm{d}\mu$.

Está concluída, portanto, a demonstração das partes 1. e 2. do teorema no caso em que ν e μ são positivas e σ-finitas.

iii) No caso geral, i.e. ν medida com sinal e μ medida positiva em $(X, \mathcal{M})$, ambas σ-finitas: tome $\nu = \nu^+ - \nu^-$ decomposição de Jordan para ν. Então $\nu^\pm$ são medidas positivas e σ-finitas (sendo ao menos uma delas finita) em $(X, \mathcal{M})$. Podemos, pois, aplicar a parte ii) para (ν^+, μ) e (ν^-, μ), obtendo-se decomposições de Lebesgue $\nu^\pm = (\nu^\pm)_s + (\nu^\pm)_a$, com $(\nu^\pm)_a = f^\pm\,\mathrm{d}\mu$ e $f^\pm$ mensuráveis e positivas, sendo ao menos uma delas integrável (e podemos supor que a parte integrável toma valores finitos, modificando-a, se necessário, num conjunto μ-nulo). Ponha $\nu_s \doteq (\nu^+)_s - (\nu^-)_s$, $\nu_a \doteq (\nu^+)_a - (\nu^-)_a$ e $f \doteq f^+ - f^-$. Então $\nu = \nu_s + \nu_a$ é uma decomposição de Lebesgue para ν com respeito a μ, ν_s e ν_a são ambas σ-finitas, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é μ-quase integrável e $\nu_a = f\,\mathrm{d}\mu$. Note que o fato de ser $\nu^+ \perp \nu^-$ implica $(\nu^+)_s \perp (\nu^-)_s$ e $(\nu^+)_a \perp (\nu^-)_a$, o que acarreta, pela unicidade da decomposição de Jordan, $(\nu_s)^+ = (\nu^+)_s$, $(\nu_s)^- = (\nu^-)_s$, $(\nu_a)^+ = (\nu^+)_a$, e $(\nu_a)^- = (\nu^-)_a$, de modo que podemos omitir os parêntesis da notação.

Se λ_s e λ_a forem outras medidas com sinal em $(X, \mathcal{M})$ tais que $\lambda_s \perp \mu$, $\lambda_a \ll \mu$ e $\nu = \lambda_s + \lambda_a$, então $\lambda_a \perp \lambda_s$, o que implica (verifique) $[(\lambda_s)^+ + (\lambda_a)^+] \perp [(\lambda_s)^- + (\lambda_a)^-]$. Daí, pela unicidade da decomposição de Jordan, conclui-se que $\nu^+ = (\lambda_s)^+ + (\lambda_a)^+$ e $\nu^- = (\lambda_s)^- + (\lambda_a)^-$. E, como $(\lambda_s)^\pm \perp \mu$ e $(\lambda_a)^\pm \ll \mu$, conclui-se da parte ii), i.e. da unicidade da decomposição de Lebesgue no caso em que as medidas são positivas, que $\nu_s^+ = (\lambda_s)^+$, $\nu_a^+ = (\lambda_a)^+$, $\nu_s^- = (\lambda_s)^-$ e $\nu_a^- = (\lambda_a)^-$, de modo que $\lambda_s = (\lambda_s)^+ - (\lambda_s)^- = \nu_s^+ - \nu_s^- = \nu_s$ e, analogamente, $\lambda_a = \nu_a$, o que prova a unicidade da decomposição de Lebesgue no caso geral.

Se $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ for μ-quase integrável e $\nu_a = g\,\mathrm{d}\mu$, então, pela unicidade da decomposição de Jordan, $\nu^+ = g^+\,\mathrm{d}\mu$ e $\nu^- = g^-\,\mathrm{d}\mu$, de modo que, pela parte ii), $g^+ = f^+$ e $g^- = f^-$ μ-quase sempre, i.e. $g = f$ μ-quase sempre.

Para concluir, se $\nu \ll \mu$, a unicidade da decomposição de Lebesgue fornece $\nu_s = 0$ e $\nu = \nu_a = f\,\mathrm{d}\mu$.

$\square$