MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 15 (2/5)`

I) Medidas com Sinal. Fixemos um espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$ até o final desta seção.

Definição 1 (medida com sinal). Uma *medida com sinal* ou *carga* em $(X, \mathcal{M})$ é uma aplicação $\nu : \mathsf{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

ms.i) $\operatorname{Im} \nu \subset (-\infty, \infty]$ ou $\operatorname{Im} \nu \subset [-\infty, \infty)$.

ms.ii) $\nu(\emptyset) = 0$.

ms.iii) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\!\cdot\, \mathcal{M}$, $\nu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$, com o significado de que, no segundo membro, a integral com respeito à medida de contagem existe e é igual ao primeiro membro (ou, equivalentemente, uma das séries $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)^-$ tem soma finita e $\nu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)^-$).

Observação. Por uma questão de clareza, doravante usaremos "medida positiva" para designar uma medida $\mathcal{M} \to [0, \infty]$.

Exemplo 1: 1. Se $\mu^+, \mu^- : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ forem medidas positivas, sendo ao menos uma delas finita, $\nu \doteq \mu^+ - \mu^-$ é uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$.

2. Se μ for uma medida positiva em $\mathcal{M}$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ for μ-quase integrável, $\nu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $E \mapsto \int f \, d\mu$ é uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$.

Veremos, mais adiante, que toda medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$ pode ser escrita em qualquer uma das formas do exemplo acima.

Proposição 1 (continuidade para cima e para baixo). Seja ν medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$.

i) (continuidade para cima) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ crescente, $\nu(\cup_{n\in\mathbb{N}}) = \lim \nu(A_n)$.

ii) (continuidade para baixo) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ decrescente e $\nu(A_1)$ finito, $\nu(\cap_{n\in\mathbb{N}}) = \lim \nu(A_n)$.

Demonstração. É o mesmo argumento usado na prova do enunciado correspondente para medidas positivas:

i) Tome $(\forall n \in \mathbb{N})\tilde{A}_n \doteq A_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} A_k$. Então $(\tilde{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\!\cdot\, \mathcal{M}$ e $\dot{\cup}_{n\in\mathbb{N}} \tilde{A}_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, de modo que, por (ms.iii), $\nu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(\tilde{A}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(\tilde{A}_k) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$, pois $(\forall n) A_n = \dot{\cup}_{k=1}^{n} \tilde{A}_k$.

ii) Aplique a parte i) à sequência crescente $(A_1 \setminus A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para concluir que $\nu(A_1 \setminus \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim \nu(A_1 \setminus A_n)$. Como $\nu(A_1)$ é finito, $\nu(A_1 \setminus \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \nu(A_1) - \nu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ e $\lim \nu(A_1 \setminus A_n) = \nu(A_1) - \lim \nu(A_n)$, donde a tese.

$\square$

Definição 2 (conjuntos positivos, negativos e nulos). Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$ e $A \in \mathcal{M}$. Diz-se que A é:

i) *positivo* com respeito a ν se $\forall B \in \mathcal{M}$ tal que $B \subset A$, $\nu(B) \geq 0$.

ii) *negativo* com respeito a ν se $\forall B \in \mathcal{M}$ tal que $B \subset A$, $\nu(B) \leq 0$.

iii) *nulo* com respeito a ν se for positivo e negativo, i.e. se $\forall B \in \mathcal{M}$ tal que $B \subset A$, $\nu(B) = 0$.

Proposição 2. Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$.

1. Se $A \in \mathcal{M}$ for positivo (respectivamente, negativo), todo subconjunto mensurável de A é positivo (resp., negativo).

2. Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ for uma sequência de positivos (resp., negativos), $(\cup_{n\in\mathbb{N}})A_n$ é positivo (resp., negativo).

Demonstração. A parte 1. é imediata. Provemos a parte 2., supondo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ sequência de positivos. Tome $(\forall n \in \mathbb{N})\tilde{A}_n \doteq A_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} A_k$. Então $(\tilde{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\!\cdot\, \mathcal{M}$ e, para todo $B \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mensurável, $\nu(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(B \cap \tilde{A}_n) \geq 0$, pois $(\forall n) B \cap \tilde{A}_n \subset A_n$ é positivo. $\square$

Teorema 1 (teorema de decomposição de Hahn). Seja ν uma medida com sinal em $(X, \mathcal{M})$. Então existem $P, N \in \mathcal{M}$, P positivo e N negativo com respeito a ν, tais que $P \cup N = X$ e $P \cap N = \emptyset$. Além disso, esta decomposição é única no seguinte sentido: se P', N' forem outros mensuráveis com a mesmas propriedades, então $P \Delta P'$ e $N \Delta N'$ são nulos com respeito a ν.

Ideia: SPG, suponha $\infty \notin \operatorname{Im} \nu$ (caso contrário faça o argumento com $-\nu$). Suponha que exista uma tal decomposição. Para todo $\tilde{P}$ positivo, $\nu(\tilde{P}) = \nu(\tilde{P} \cap P) + \nu(\tilde{P} \cap N) = \nu(\tilde{P} \cap P) \leq \nu(P)$. Isso nos motiva a procurar P em $\{A \subset X | A \text{ positivo}\}$ com medida máxima.

Demonstração. Suponha, SPG, que $\infty \notin \operatorname{Im} \nu$. Tome $\mathcal{P} \doteq \{P \in \mathcal{M} | P \text{ positivo}\}$. Note que $\emptyset \in \mathcal{P}$, logo $\mathcal{P}$ é não vazio. Seja $m \doteq \sup\{\nu(P) | P \in \mathcal{P}\} \in [0, \infty]$. Afirmo que m é um máximo; em particular, $m < \infty$, pois $\infty \notin \operatorname{Im} \nu$. Com efeito, considere $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{P}$ tal que $\nu(P_n) \to m$. Defina $(\tilde{P}_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ por $(\forall n) \tilde{P}_n \doteq \cup_{k=1}^n P_k$. Então $(\forall n) \tilde{P}_n$ é positivo, pela proposição 2. Ou seja, $(\tilde{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente em $\mathcal{P}$. E, como $(\forall n) m \geq \nu(\tilde{P}_n) = \nu(P_n) + \nu(\tilde{P}_n \setminus P_n) \geq \nu(P_n)$ (pois $\tilde{P}_n$ é positivo e $\tilde{P}_n = P_n \dot{\cup} (\tilde{P}_n \setminus P_n)$), conclui-se que $\nu(\tilde{P}_n) \to m$. Pondo $P \doteq \cup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{P}_n$, P é positivo (pela proposição 2) e, pela continuidade para cima, $\nu(P) = \lim \nu(P_n) = m$, de modo que $m = \nu(P) < \infty$ é o máximo do conjunto $\{\nu(P) | P \in \mathcal{P}\}$, como afirmado.

Verifiquemos, agora, que $N \doteq X \setminus P$ é negativo com respeito a ν. Precisamos mostrar que, para todo mensurável $A \subset N$, $\nu(A) \leq 0$; suponha o contrário, i.e. $\exists A \in \mathcal{M}$, $A \subset N$ com $\nu(A) > 0$. Como A não pode ser positivo (pois, se fosse, $P \cup A$ seria um positivo com medida $m + \nu(A) > m$, contrariando a maximalidade de m), existe um mensurável $B \subset A$ tal que $\nu(B) < 0$ (e $\nu(B)$ finita, pois $\nu(A) = \nu(B) + \nu(A \setminus B)$ é finita), portanto $\nu(A \setminus B) = \nu(A) - \nu(B)$ é estritamente maior que $\nu(A)$. Portanto, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} | \exists \tilde{A} \subset A \text{ mensurável com } \nu(\tilde{A}) > \nu(A) + 1/n\}$ é não vazio; tome n_1 o menor elemento desse conjunto e $A_1 \subset A$ mensurável com $\nu(A_1) > \nu(A) + 1/n_1$. Indutivamente, suponha definidos $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ e $A \supset A_1 \supset \cdots \supset A_k$ mensuráveis; reaplicando o argumento acima com A_k no lugar de A, tomamos n_{k+1} o menor elemento do conjunto não vazio de naturais $\{n \in \mathbb{N} | \exists \tilde{A} \subset A_k \text{ mensurável com } \nu(\tilde{A}) > \nu(A_k) + 1/n\}$ e $A_{k+1} \subset A_k$ mensurável com $\nu(A_{k+1}) > \nu(A_k) + 1/n_{k+1}$. Ficam bem definidos, pois, uma sequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e uma sequência decrescente $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos mensuráveis de A tais que, pondo $A_0 \doteq A$, $(\forall k \in \mathbb{N}) \nu(A_k) > \nu(A_{k-1}) + 1/n_k$. Como $\nu(A_1)$ é finito, a continuidade para baixo de ν implica $\nu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim \nu(A_n) = \sup\{\nu(A_n) | n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Como $(\forall k) \nu(A_k) > \nu(A_{k-1}) + 1/n_k > \nu(A_{k-2}) + 1/n_{k-1} + 1/n_k > \cdots > \nu(A) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j}$, conclui-se que a k-ésima soma parcial da série $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{n_k}$ é limitada por $\nu(A_k) - \nu(A) \leq \nu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) - \nu(A) < \infty$. Ou seja, a referida série é convergente, portanto $\frac{1}{n_k} \to 0$. Finalmente, podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ e um mensurável $B \subset \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ tais que $\nu(B) > \nu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) + 1/N$. E, como $n_k \to \infty$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N < n_k$; portanto, $B \subset A_k$ e $\nu(B) > \nu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) + 1/N \geq \nu(A_k) + \frac{1}{N}$, contrariando a minimalidade de n_k. Chegamos, pois, a uma contradição, como consequência da suposição da existência de $A \in \mathcal{M}$, $A \subset N$ com $\nu(A) > 0$. Portanto, $N = X \setminus P$ é negativo, como afirmado.

A unicidade da decomposição, no sentido enunciado, decorre do fato de que, se $P' \in \mathcal{M}$ positivo e $N' \in \mathcal{M}$ negativo forem tais que $P' \cup N' = X$ e $P' \cap N' = \emptyset$, então $P \setminus P'$ é positivo, por ser subconjunto de P, e negativo, por ser subconjunto de $(P')^c = N'$, portanto é nulo; analogamente, $P' \setminus P$ é nulo, donde $P \Delta P'$ é nulo. Por argumento análogo, $N \Delta N'$ é nulo. $\square$

Definição 3. Com a notação do teorema acima, o par (P, N) chama-se uma *decomposição de Hahn* para ν.