MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 14 (27/4)`

I) Integração em Coordenadas Polares.

I.1) Revisão sobre o pushforward de medidas.

Definição 1. Sejam, $(X,\mathcal{M})$, $(Y,\mathcal{N})$ espaços de medida, $f : X \to Y$ mensurável e $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ medida.

$$\begin{aligned} f_*\mu : \mathcal{N} &\to [0,\infty] \\ E &\mapsto \mu(f^{-1}E) \end{aligned}$$

Então $f_*\mu$ é uma medida; chama-se *pushforward* de μ por f.

- Observação: O push-forward é "funtorial":

  1. Se $(X,\mathcal{M}) \xrightarrow[\text{mens}]{f} (Y,\mathcal{N}) \xrightarrow[\text{mens}]{g} (Z,\mathcal{O})$ e $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ medida. Então
  $$(g \circ f)_*\mu = g_*(f_*\mu)$$
  (pois, $\forall E \subset Z$, $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}E)$).
  2. Se $f = $id: $(X,\mathcal{M})$, $f_*\mu = \mu$.
  Em particular, decorre de 1) e 2) que, se $(X,\mathcal{M}) \xrightarrow{f} (Y,\mathcal{N})$ for isomorfismo mensurável e μ,ν medidas em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, então $f_*\mu = \nu \Leftrightarrow \mu = (f^{-1})_*\nu$.

- Notação: Sejam $(X,\mathcal{M},\mu)$ espaço de medida e $f \in L^+(X)$. Já sabemos que
$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\to [0,\infty] \\ E &\mapsto \int_E f d\mu \end{aligned}$$
é uma medida. Denotá-la-emos por $fd\mu$. Assim, se $f = 1$, $d\mu$ é a própria μ.

Proposição 1 (questão 2 da lista 8). Sejam $(X,\mathcal{M}) \xrightarrow{\phi} (Y,\mathcal{N})$ mensurável e $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ medida. Para $f : Y \to \mathbb{K}$ mensurável, tem-se:

(i) Se $f \geq 0$,
$$\int f d(\phi_*\mu) \overset{(*)}{=} \int f \circ \phi \, d\mu$$

(ii) $f \in L^1(\phi_*\mu)$ **`see`** $f \circ \phi \in L^1(\mu)$ e, caso afirmativo, vale a igualdade $(*)$.

- Prova:

  1. (i) vale se $f = \chi_E$, $E \in \mathcal{N}$, pois:
  $$\int \chi_E d(\phi_*\mu) = \phi_*\mu(E) = \mu(\phi^{-1}(E)) = \int \underbrace{\chi_{\phi^{-1}E}}_{\chi_E \circ \phi} d\mu$$
  2. De 1) e da aditividade da integral, $(*)$ também vale para f simples positiva.
  3. De 2) e do TCM, $(*)$ também vale para $f \in L^+(Y,\mathcal{N})$; isso prova (i).
  4. (ii) decorre de (i) aplicado, dada $f : Y \to \mathbb{C}$ mensurável, a $(\mathrm{Re}f)^{\pm}$ e $(\mathrm{Im}f)^{\pm}$.

Observação. (o teorema de mudança de variáveis, bis) Seja $\phi : \Omega \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ difeomosfismo C^1 sobre $\phi(\Omega)$. Para $E \subset \Omega$ Lebesgue-mensurável, pelo teorema de mudança de variáveis, $\phi(E)$ é Lebesgue-mensurável e

$$m(\phi(E)) = \int_E |\det D\phi(x)| dm(x).$$

Assim, $\forall F \subset \phi(\Omega)$ mensurável, usando ϕ^{-1} no ludar de ϕ

$$(\phi_* m)(F) = m(\phi^{-1}(F)) = \int_F |\det D\phi^{-1}(x)| dm(x)$$

Noutras palavras, tomando

$$(\Omega, \mathcal{L}|_\Omega, m) \xrightarrow{\phi} (\phi(\Omega), \mathcal{L}|_{\phi(\Omega)})$$

tem-se $\boxed{\phi_* m = |\det D\phi^{-1}| dm}$.

- Exercício: (para quem já fez EDO) Seja $X : \Omega \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 e tal que div $X \equiv 0$. Se $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ for o grupo local a 1-parâmetro induzido por X, então $(\phi_t)_* m = m$.

I.2) Coordenadas Polares

- Notação: $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ e $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.
- Tome

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} &\to (0,\infty) \times S^{n-1} \\ x &\mapsto \left(|x|, \frac{x}{|x|}\right) \\ \phi^{-1} : (0,\infty) \times S^{n-1} &\to \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \\ (r, x') &\mapsto r \cdot x' \end{aligned}$$

Então ϕ e ϕ^{-1} são contínuas, i.e. ϕ é um homeomorfismo. Daí,

$$(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}) \xrightarrow{\phi} ((0,\infty) \times S^{n-1}, \mathcal{B}_{(0,\infty)\times S^{n-1}} = \mathcal{B}_{(0,\infty)} \otimes \mathcal{B}_{S^{n-1}})$$

é um isomorfismo mensurável.

- Objetivo: Para m medida de Lebesgue $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}} \to [0,\infty]$, quero escrever $\phi_* m$ como um produto $\nu \times \sigma$, com $\nu : \mathcal{B}_{(0,\infty)} \to [0,\infty]$ e $\sigma : \mathcal{B}_{S^{n-1}} \to [0,\infty]$ medidas borelianas.
- Suponha que existam ν e σ como acima. Tem-se:

  1. $\forall a > 0$,

  $$\underbrace{(\phi_* m)((0,a] \times S^{n-1})}_{= m(\underbrace{\phi^{-1}((0,a] \times S^{n-1})}_{= B_a[0]\backslash\{0\}})} = m(B_a[0]) \overset{(\triangle)}{=} a^n m(B^n) = \nu((0,a])\sigma(S^{n-1})$$

  A igualdade $(\triangle)$ decorre do fato de que, tomando $\lambda_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a homotetia de razão a, i.e. dada por $x \mapsto ax$, tem-se $B_a[0] = \lambda_a(B^n)$, logo $m(\lambda_a(B^n)) = |\det \lambda_a| m(B^n) = |a^n| m(B^n) = a^n m(B^n)$.

  2. De 1. decorre que, se $0 \leq a < b < \infty$,

  $$\underbrace{(\phi_* m)((0,b] \times S^{n-1} - (0,a] \times S^{n-1})}_{= \underbrace{(b^n - a^n) m(B^n)}_{> 0 \text{ e } < \infty}} = \phi_* m((a,b] \times S^{n-1}) = \nu((a,b])\sigma(S^{n-1})$$

  Daí, $\nu((a,b])$ e $\sigma(S^{n-1})$ são ambos > 0 e $< \infty$, e

  $$\nu((a,b]) = \underbrace{(b^n - a^n)}_{\int_a^b n r^{n-1} dr} \frac{m(B^n)}{\sigma(S^{n-1})} = \int_{(a,b]} r^{n-1} dm(r) \frac{n \cdot m(B^n)}{\sigma(S^{n-1})}.$$

Imponhamos a condição adicional de que σ satisfaça $\sigma(S^{n-1}) = n \cdot m(B^n)$ (com esta escolha, a medida σ que obteremos coincidirá com a medida de Lebesgue da variedade riemanniana S^{n-1}). Daí, $\forall\ 0 \leq a < b < \infty$, as medidas ν e $r^{n-1}\,dm(r)$ coincidem no h-intervalo $(a, b]$.

 – Exercício: Use a unicidade dada pelo teorema de extensão de Carathéodory e um argumento conveniente para concluir que a condição acima implica que $\nu = r^{n-1}dm(r)$.

3. Por outro lado, dado $E \in \mathcal{B}_{S^{n-1}}$, defina:

$$\hat{E} \doteq \phi^{-1}((0,1] \times E) = \{r \cdot x' | 0 < r \leq 1,\, x' \in E\}.$$

Tem-se:

$$\underbrace{\phi_* m((0,1] \times E)}_{m(\hat{E})} = \nu \times \sigma((0,1] \times E) = \underbrace{\nu(0,1]}_{=1/n}\sigma(E) = \frac{\sigma(E)}{n}.$$

Conclusão: $\sigma(E) = n \cdot m(\hat{E})$. Isso demonstra a "unicidade" enunciada no teorema abaixo.

Teorema 1. Seja $\phi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to (0, \infty) \times S^{n-1}$ como acima. Então existem, e são únicas, medidas borelianas $\nu : \mathcal{B}_{(0,\infty)} \to [0, \infty]$ e $\sigma : \mathcal{B}_{S^{n-1}} \to [0, \infty]$ tais que $\phi_* m = \nu \times \sigma$ e $\sigma(S^{n-1}) = n \cdot m(B^n)$. A saber: $\nu = r^{n-1}dm(r)$ e $\sigma : E \in \mathcal{B}_{S^{n-1}} \mapsto n \cdot m(\hat{E})$.

- Prova:

 (i) Unicidade: decorre do exposto acima.

 (ii) Existência: Definimos $\nu \doteq r^{n-1}dr$ e $\sigma : \mathcal{B}_{S^{n-1}} \to [0, \infty]$ por $E \mapsto n \cdot m(\hat{E})$. Verifiquemos que ν e σ são medidas e satisfazem o enunciado.

 ii.1) ∗ ν é medida: tome $f : (0, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $r \mapsto r^{n-1}$, a qual é mensurável e positiva; então $\nu = f dm$ é uma medida (decorre do teorema da convergência monótona - vide questão 14 da lista 7).

 ∗ σ é medida:

 (a) $\sigma(\emptyset) = n \cdot m(\hat{\emptyset}) = n \cdot m(\emptyset) = 0$.

 (b) Se $(E_n)_n \prec\!\!\cdot\, \mathcal{B}_{S^{n-1}}$, $(\hat{E}_n)_n \prec\!\!\cdot\, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, donde

$$\sigma\left(\dot{\bigcup_n} E_n\right) = n \cdot m\left(\widehat{\bigcup_n E_n}\right) = n \cdot m\left(\dot{\bigcup_n} \hat{E}_n\right) = n \cdot \sum_n m(\hat{E}_n) = \sum_n \sigma(E_n).$$

 ii.2) $\sigma(S^{n-1}) = n \cdot m(\widehat{S^{n-1}}) = n \cdot m(B^n \backslash \{0\}) = n \cdot m(B^n)$.

 ii.3) Resta verificar que $\phi_* m = \nu \times \sigma$:

 (a) $\forall a > 0$, $\forall E \in \mathcal{B}_{S^{n-1}}$:

$$\phi_* m((0,a] \times E) = m(\underbrace{\phi^{-1}((0,a] \times E)}_{= \lambda_a \hat{E}}) = a^n m(\hat{E}) = \frac{a^n}{n} \cdot n \cdot m(\hat{E}) = \frac{a^n}{n}\sigma(E)$$

 (b) Daí, se $0 \leq a < b < \infty$:

$$\phi_* m((a,b] \times E) = \underbrace{\frac{b^n - a^n}{n}}_{= \int_{(a,b]} r^{n-1}dr} \sigma(E) = \nu((a,b])\sigma(E) = \nu \times \sigma((a,b] \times E)$$

 Conclusão: $\phi_* m$ e $\nu \times \sigma$ coincidem em $\{(a,b] \times E : 0 \leq a < b < \infty,\, E \in \mathcal{B}_{S^{n-1}}\}$.

 ∗ Exercício: Use o roteiro abaixo para concluir que isso implica $\phi_* m = \nu \times \sigma$.

 1. Seja $S \subset \mathbb{P}\big((0,\infty) \times S^{n-1}\big)$ dado por $S \doteq \big\{\big((a,b] \cap \mathbb{R}\big) \times E | 0 \leq a < b \leq \infty, E \in \mathcal{B}_{S^{n-1}}\big\}$. Então S é uma semiálgebra e decorre da conclusão anterior que $\phi_* m$ e $\nu \times \sigma$ coincidem em S, logo coincidem na álgebra $\mathcal{A}(S)$ gerada por S.

 2. Decorre de 1., do fato de que $\nu \times \sigma$ é σ-finita em $\mathcal{A}(S)$ e da unicidade dada pelo teorema de extensão de Carathéodory, que $\phi_* m$ e $\nu \times \sigma$ coincidem em $\sigma\big(\mathcal{A}(S)\big) = \mathcal{B}_{(0,\infty)} \otimes \mathcal{B}_{S^{n-1}}$.

Corolário 1. Com a notação do teorema acima:

a) $(\phi^{-1})_*(\nu \times \sigma) = m$

b) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ boreliana com $f \geq 0$ ou $f \in L^1(m)$, então:

$$\int f dm = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \underbrace{f(rx')}_{= f\circ\phi^{-1}(r,x')} r^{n-1} d\sigma(x') dm(r) =$$

$$= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(rx') \underbrace{r^{n-1} dm(r)}_{= d\nu(r)} d\sigma(x').$$

- Prova:

  a) Decorre da funtorialidade do pushforward, do fato de que ϕ é isomorfismo mensurável e $\phi_* m = \nu \times \sigma$.

  b)

$$\int f dm = \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} f dm = \int_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}} f d[(\phi^{-1})_*(\nu\times\sigma)] \overset{\text{prop. 1}}{=} \int_{(0,\infty)\times S^{n-1}} f\circ\phi^{-1} d(\nu\times\sigma)$$

  e a tese segue do teorema de Fubini-Tonelli.

Corolário 2. Com a notação do teorema, sejam $g : [0,\infty) \to [0,\infty]$ boreliana e $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ dada por $f(x) = g(\|x\|)$. Então:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dm = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r) r^{n-1} dr.$$

- Prova: f é boreliana (pois é composta de borelianas) positiva e:

$$\int f dm \overset{\text{cor (1)}}{=} \int_0^\infty \left[\int_{S^{n-1}} \underbrace{f(rx')}_{= g(r)} r^{n-1} d\sigma(x') \right] dr = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r) r^{n-1} dr.$$

- Exemplos:

  1. Sejam $R > 0$, $B \doteq B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. Dado $a \in \mathbb{R}$, queremos discutir a integrabilidade de

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^n\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x|^{-a} \end{array}$$

  em B e em B^c. Tem-se, pelo corolário (2):

  (i)

$$\int_B |x|^{-a} dm(x) = \int \underbrace{\chi_B(x)|x|^{-a}}_{\doteq f(x)} dm(x)$$

$$\overset{(*)}{=} \sigma(S^{n-1}) \int \chi_{(0,R)}(r) r^{-a} \cdot r^{n-1} dr$$

$$= \sigma(S^{n-1}) \int_0^R r^{-(a-n+1)} dm(r) < \infty \overset{\text{pela obs. adiante}}{\Leftrightarrow} a - n + 1 < 1 \Leftrightarrow \boxed{a < n}.$$

  $(*)$: corolário (2), com $g(r) = \chi_{(0,R)}(r) r^{-a}$.

  $*$ Observação: Cálculo de $\int_{(0,R)} r^{-(a-n+1)} dm(r)$:
  Para $0 < \delta < R$:

$$\int_{[\delta,R]} r^{-\overbrace{(a-n+1)}^{\alpha}} dm(r) = \underbrace{\int_\delta^R r^{-\alpha} dr}_{\text{int. Riemann}} \overset{\text{TFC}}{=} \begin{cases} \left.\dfrac{r^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_\delta^R & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \left.\ln r\right|_\delta^R & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

  Ou seja, $\int \chi_{[\delta,R]}(r) r^{-\alpha} dm(r)$ é dada pela chave acima. Tomando $\delta_n \searrow 0$, $\chi_{[\delta_n,R]}(r) r^{\alpha} \overset{\text{p.}}{\nearrow} \chi_{(0,R]}(r) r^{-\alpha}$ e, pelo TCM:

$$\int_{(0,R)} r^{-\alpha} dm(r) = \int_{(0,R]} r^{-\alpha} dm(r) = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \dfrac{R^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} < \infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

(ii)

$$\int_{B^c} |x|^{-a} dm(x) \overset{\text{analogamente}}{=} \sigma(S^{n-1}) \int_R^\infty r^{-(a-n+1)} dm(r) < \infty \Leftrightarrow \boxed{a > n}.$$

2. Dado $a > 0$, calculemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2} dm(x) \doteq I_n.$$

Note que, pelo corolário (2), com $g(r) = e^{-ar^2}$, tem-se

$$I_n = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty e^{-ar^2} r^{n-1} dm(r). \tag{1}$$

2.1) Para $n = 2$:

$$I_2 = \underbrace{\sigma(S^1)}_{\substack{= 2 \cdot m(B^2) \\ = 2\pi}} \int_0^\infty e^{-ar^2} r dm(r).$$

Dado $b > 0$:

$$\int_{[0,b]} e^{-ar^2} r dm(r) = \underbrace{\int_0^b e^{-ar^2} r dr}_{\text{int. Riemann}} \overset{\text{TFC}}{=} -\frac{1}{2a} e^{-ar^2}\Big|_0^b = -\frac{1}{2a}[e^{-ab^2} - 1].$$

Tomando $b = n$, $\chi_{[0,n]}(r) e^{-ar^2} r \overset{\text{p.}}{\nearrow}_{n\to\infty} \chi_{[0,\infty)}(r) e^{-ar^2} r$ donde, pelo TCM:

$$\int_{[0,\infty)} e^{-ar^2} r dm(r) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{[0,n]} e^{-ar^2} r dm(r)}_{= -\frac{1}{2a}[e^{-an^2} - 1]} = \frac{1}{2a}.$$

Conclusão:

$$I_2 = 2\pi \frac{1}{2a} = \frac{\pi}{a}.$$

2.2) Note que, se $x = (x_1, \cdots, x_n)$,

$$e^{-a|x|^2} = e^{-a(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} = \prod_{j=1}^n e^{-ax_j^2}.$$

Portanto, pelo teorema de Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2} dm(x) = \prod_{j=1}^n \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-ax_j^2} dm(x_j)}_{= I_1} = I_1^n.$$

Em particular,

$$\frac{\pi}{a} = I_2 = I_1^2$$
$$\therefore\ I_1 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$$
$$\therefore\ I_n = \boxed{\left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}}.$$

3. Recorde:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dm(t) \qquad \text{Re} z > 0.$$

Na igualdade (1), tome $a = 1$, de modo que

$$\pi^{n/2} = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dm(r). \tag{2}$$

Dado $b > 0$, calculemos:

$$\int_{[0,b]} e^{-r^2} r^{n-1} dm(r) = \underbrace{\int_0^b e^{-r^2} r^{n-1} dr}_{\text{int. Riemann}}$$

Tome

$$\begin{aligned} g : [0, b^2] &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto \sqrt{s} \end{aligned}$$

do modo que $g \in C^1$, $g(0) = 0$, $g(b^2) = b$. Pelo teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann:

$$\begin{aligned} \int_0^b e^{-r^2} r^{n-1} dr &= \int_0^{b^2} e^{-g(s)^2} g(s)^{n-1} g'(s) ds = \\ &= \int_0^{b^2} e^{-s} s^{(n-1)/2} \frac{1}{2s^{1/2}} ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{b^2} e^{-s} s^{n/2-1} ds = \frac{1}{2} \int_{[} 0, b^2] e^{-s} s^{n/2-1} dm(s). \end{aligned}$$

Tomando $b = n$ e aplicando-se o TCM:

$$\int_{[0,\infty)} e^{-r^2} r^{n-1} dm(r) = \frac{1}{2} \int_{[0,\infty)} e^{-s} s^{n/2-1} dm(s) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Portanto, da igualdade (2), obtém-se:

$$\sigma(S^{n-1}) = \boxed{\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}}.$$

Daí,

$$m(B^n) = \frac{\sigma(S^{n-1})}{n} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{n/2}}{\underbrace{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}_{= \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}} = \boxed{\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}}.$$