# MAT 5798 – Medida e Integração
# IME – 2017

http://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798
Notas da Aula 12 (20/4)

## I) Medida Produto (continuação)

Proposição 1. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida $\sigma$-finitos. Dado $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$:

1. as aplicações $X \to [0, \infty]$ e $Y \to [0, \infty]$ definidas, respectivamente, por $x \mapsto \nu(E_x)$ e $x \mapsto \mu(E^y)$, são ambas mensuráveis.
2. $\int \nu(E_x) d\mu(x) = \mu \times \nu(E) = \int \mu(E^y) d\nu(y)$.

- Prova da proposição:

  (i) Suponha $\mu$ e $\nu$ finitos. Seja $\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} |\ 1.\text{ e } 2.\text{ valem para } E\}$. $\vdash \mathcal{C} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Basta mostrar:

  1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{C}$.
  2. $\mathcal{C}$ é uma classe monótona.

  Daí: $\mathcal{C} \supset \mathcal{C}(\mathcal{A}) \overset{\text{Lema da classe monótona}}{=} \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ e então $\mathcal{C} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

  Tem-se:

  (a) Se $E = A \times B \in \mathcal{R}$ (i.e. $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$),

$$\forall x \in X, E_x = \begin{cases} B & \text{se } x \in A \\ \emptyset & \text{c.c.} \end{cases}$$

  $\therefore \nu(E_x) = \chi_A(x)\nu(B) \therefore x \mapsto \nu(E_x)$ é mensurável. Analogamente, $y \mapsto \mu(E^y)$ é mensurável. Além disso,

$$\int \nu(E_x) d\mu(x) = \int \chi_A(x)\nu(B) d\mu(x) = \nu(B) \underbrace{\int \chi_A d\mu}_{=\mu(A)} = \mu(A)\nu(B) = (\mu \times \nu)(A \times B) = (\mu \times \nu)(E)$$

  Analogamente,

$$\int \mu(E^y) d\nu(y) = (\mu \times \nu)(E)$$

  (b) Se $E = \dot\cup_{i=1}^n E_i$ com $E_i \in \mathcal{R}$ para $1 \leq i \leq n$: $(\forall x \in X)\ E_x = \dot\cup_{i=1}^n (E_i)_x \therefore \nu(E_x) = \sum_{i=1}^n \nu((E_i)_x)$ $\therefore$ 1. vale para $x \mapsto \nu(E_x)$. Além disso:

$$\int \nu(E_x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\int \nu((E_i)_x) d\mu(x)}_{\overset{\text{por (a)}}{=} (\mu \times \nu)(E_i)} = \mu \times \nu(E)$$

  $\therefore$ 2. vale para $\int \nu(E_x) d\mu$. Para as seções "$y$" o argumento é análogo. Então $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$.

  (c) Afirmo que $\mathcal{C}$ é classe monótona. É claro que $\mathcal{C} \neq \emptyset$, pois $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$.

  (c.1) Seja $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{C}$ crescente. $\vdash E \doteq \cup_n E_n \in \mathcal{C}$. Com efeito:

  - $\forall x \in X$: $(\cup_n E_n)_n = \cup_n (E_n)_x$ e, pela continuidade para cima de $\nu$, segue $\nu(E_x) = \lim \nu((E_n)_x)$ é $\mathcal{M}$-mensurável.
  - Como $x \mapsto \nu((E_n)_x)$ cresce pontualmente para $x \mapsto \nu(E_x)$, pelo TCM

$$\underbrace{\int \nu((E_n)_x) d\mu(x)}_{= \mu \times \nu(E_n) \xrightarrow{(*)} \mu \times \nu(E)} \xrightarrow{\text{TCM}} \int \nu(E_x) d\mu(x)$$

  onde $(*)$ vale pela continuidade para cima para $\mu \times \nu$. Portanto, pela unicidade do limite, segue:

$$\int \nu(E_x) d\mu(x) = \mu \times \nu(E)$$

O mesmo argumento se aplica para as seções "$x$" e conclui-se que $E = \cup_{n\in\mathcal{N}} E_n \in \mathcal{C}$.

(c.2) Seja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{C}$ decrescente. $\vdash E \doteq \cap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$. Com efeito:

- $\forall x \in X$: $(\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n)_x = \cap_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x$ e, como $\nu$ é finita, segue, pela continuidade para baixo de $\nu$, que $\nu(E_x) = \lim \nu((E_n)_x)$ daí $x \mapsto \nu(E_x)$ é $\mathcal{M}$-mensurável. Note que, $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\nu((E_n)_x) \leq \nu(Y) < \infty$, $\therefore \nu(Y)\chi_X$ é uma função integrável que domina a sequência $x \mapsto \nu((E_n)_x)$ e, pelo TCD:

$$\underbrace{\int \nu((E_n)_x) d\mu(x)}_{= \mu\times\nu(E_n) \xrightarrow{(**)} \mu\times\nu(E)} \xrightarrow{\text{TCD}} \int \nu(E_x) d\mu(x)$$

onde $(**)$ vale pela continuidade para baixo de $\mu \times \nu$. Logo, pela unicidade do limite, segue:

$$\int \nu(E_x) d\mu(x) = \mu \times \nu(E)$$

O mesmo vale para as seções "$y$", $\therefore E$ satisfaz 1. e 2., i.e. $E \in \mathcal{C}$. Daí $\mathcal{C}$ é classe monótona, como afirmado. Então $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{C}$, o que prova a tese no caso $\mu$ e $\nu$ finitas.

(ii) Caso geral, i.e. $\mu$ e $\nu$ $\sigma$-finitas. Posso tomar $(A_n \times B_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{R}$ crescente tal que $(\forall n)$ $\mu\times\nu(A_n \times B_n) = \mu(A_n)\nu(B_n) < \infty$ e $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times B_n = X \times Y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o caso (i) se aplica para a medida finita $(\mu\times\nu) \lrcorner (A_n \times B_n)$, a qual coincide com a medida produto das medidas finitas $\mu \lrcorner A_n$ e $\nu \lrcorner B_n$, conforme o último item do exercício abaixo:

**Exercício:**
Recorde a questão 10 da lista 2 (seção 1.3): dados $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $E \in \mathcal{M}$, $\mu \lrcorner E : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ dada por $A \mapsto \mu(A \cap E)$ é uma medida. Além disso:

a) Se $f \in \mathsf{L}^+$ ou $f \in \mathsf{L}^1(\mu)$, $\int f \, \mathrm{d}(\mu \lrcorner E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$.

b) $\mu = \mu \lrcorner E + \mu \lrcorner E^c$. Portanto, conforme visto na questão 1 da lista 8, $\mathsf{L}^1(\mu) = \mathsf{L}^1(\mu \lrcorner E) \cap \mathsf{L}^1(\mu \lrcorner E^c)$.

c) Se $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ for outro espaço de medida, $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$ $\sigma$-finitos, então $(\mu \lrcorner A) \times (\nu \lrcorner B) = (\mu \times \nu) \lrcorner (A \times B)$.

Portanto, pela parte (i), $(\forall E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \forall n \in \mathbb{N}) x \in X \mapsto \nu \lrcorner B_n(E_x)$ é mensurável e:

$$\begin{aligned} \int \nu \lrcorner B_n(E_x) \, \mathrm{d}(\mu \lrcorner A_n)(x) &= \mu \lrcorner A_n \times \nu \lrcorner B_n(E) = \\ &= \mu \times \nu(E \cap A_n \times B_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Como $(B_n)_n \prec \mathcal{N}$ é crescente e sua união é $Y$, segue-se que, $(\forall x \in X) \nu \lrcorner B_n(E_x) = \nu(E_x \cap B_n) \nearrow \nu(E_x)$, usando a continuidade para cima da medida $\nu$. Daí $x \mapsto \nu(E_x)$ é mensurável (pois é o limite pontual de uma sequência de funções mensuráveis). E, como

$$(\forall x \in X) \chi_{A_n}(x) \nu \lrcorner B_n(E_x) \overset{n\to\infty}{\nearrow} \nu(E_x)$$

conclui-se pelo TCM que $\int \nu \lrcorner B_n(E_x) \, \mathrm{d}(\mu \lrcorner A_n)(x) = \int \chi_{A_n}(x) \nu \lrcorner B_n(E_x) \, \mathrm{d}\mu(x) \to \int \nu(E_x) \, \mathrm{d}\mu(x)$. Portanto, por (1), este deve ser o limite de $\mu \times \nu(E \cap A_n \times B_n)$, o qual, usando a continuidade para cima da medida $\mu \times \nu$, também deve ser igual a $\mu \times \nu(E)$. Por unicidade do limite, conclui-se, finalmente, $\int \nu(E_x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \mu \times \nu(E)$.

O mesmo vale para as seções "$y$", daí a tese.

Teorema 1 (Tonelli). Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida <u>$\sigma$-finitos</u> e $f : X \times Y \to [0, \infty]$ $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-mensurável, $f \geq 0$. Então (1) as aplicações $X \to [0, \infty]$ e $Y \to [0, \infty]$ dadas, respectivamente, por $x \mapsto \int f_x d\nu$ e $y \mapsto \int f^y d\mu$ são ambas mensuráveis (e $\geq 0$) e:

$$(2) \int f d(\mu \times \nu) = \int \left[ \int f_x d\nu \right] d\mu = \int \left[ \int f^y d\mu \right] d\nu.$$

- <u>Prova</u>:

(i) Se $f = \chi_E$, com $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, (1) e (2) já foram provados na proposição anterior.

(ii) Segue de (i) que (1) e (2) também valem se $f$ for simples $\geq 0$; com efeito, se $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ (representação padrão), tem-se, $\forall x \in X$:

$$f_x = \sum_{i=1}^{n} a_i (\chi_{E_i})_x$$

e

$$\int f_x d\nu = \sum_{i=1}^{n} a_i \int (\chi_{E_i})_x d\nu$$

daí $x \mapsto \int f_x d\nu$ é mensurável e

$$\int \left[ \int f_x d\nu \right] d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{\int \left[ \int (\chi_{E_i})_x d\nu \right] d\mu}_{\overset{\text{(i)}}{=} \int \chi_{E_i} d(\mu \times \nu) = \mu \times \nu(E_i)} = \int f d(\mu \times \nu),$$

e argumento análogo se aplica para seções "$y$".

(iii) Dada $f \in L^+(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$, tome $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência crescente de funções simples $\geq 0$ tal que $\phi_n \overset{\text{p}}{\nearrow} f$. Então, $\forall x \in X$, $(\phi_n)_x \overset{\text{p}}{\nearrow} f_x$ e, pelo TCM,

$$\int (\phi_n)_x d\nu \nearrow \int f_x d\nu$$

Daí $x \mapsto \int f_x d\nu$ é $\mathcal{M}$-mensurável (pois é o limite pontual de uma sequência de $\mathcal{M}$-mensuráveis) e, novamente pelo TCM:

$$\underbrace{\int \left[ \int (\phi_n)_x d\nu \right] d\mu}_{\overset{\text{(ii)}}{=} \int \phi_n d(\mu \times \nu)} \overset{\text{TCM}}{\to} \int \left[ \int f_x d\nu \right] d\mu$$

$$\int \phi_n d(\mu \times \nu) \overset{\text{TCM}}{\to} \int f d(\mu \times \nu)$$

Por unicidade do limite, segue

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int \int f(x,y) d\nu(y) d\mu(x)$$

e argumento análogo para as seções "$y$".

Teorema 2 (Fubini). Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ $\sigma$-finitos.

(a) Se $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ for $\mu \times \nu$-quase integrável, então:

(1)
- Para $\mu$-q.t. $x \in X$, $f_x$ é quase-integrável e $x \mapsto \int f_x d\nu$ é uma função mensurável (definida quase sempre) e quase-integrável.
- Para $\nu$-q.t. $y \in Y$, $f^y$ é quase-integrável e $y \mapsto \int f^y d\mu$ é uma função mensurável e quase-integrável.

(2)

$$\int \left[ \int f_x d\nu \right] d\mu = \int f d(\mu \times \nu) = \int \left[ \int f^y d\mu \right] d\nu$$

(b) Dada $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$, então valem (1) e (2) acima substituindo-se "quase-integrável" por "integrável".

- Prova:

(i) Basta provar (a). Por hipótese, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ é quase-integrável; digamos, $\int f^+ d(\mu \times \nu) < \infty$.

(ii) Note que, $\forall x \in X$, $(f_x)^+ = (f^+)_x$; omitiremos, pois, os parênteses da notação e escreveremos $f_x^+$.

(iii) Pelo teorema de Tonelli aplicado a $f^+$ e $f^-$, tem-se:

$$\begin{aligned} X &\to [0, \infty] \\ x &\mapsto \int f_x^{\pm} d\nu \end{aligned}$$

é mensurável e

$$\int \left[ \int f_x^{\pm} d\nu \right] d\mu = \int f^{\pm} d(\mu \times \nu)$$

(iv) Como $\int f^+ d(\mu\times\nu)<\infty$ tem-se

$$\int\left[\int f_x^+ d\nu\right]d\mu<\infty$$

daí $\exists N\in\mathcal{M}$ com $\mu(N^c)=0$ e $(\forall x\in N)$ $\int f_x^+ d\nu<\infty$. Então, $\forall x\in N$, $f_x$ é quase-integrável e

$$\int f_x d\nu=\int f_x^+ d\nu-\int f_x^- d\nu$$

e daí

$$\begin{aligned} N&\to\overline{\mathbb{R}}\\ x&\mapsto\int f_x d\nu\end{aligned}$$

é mensurável, i.e. $x\mapsto\int f_x d\nu$ é mensurável no sentido estendido. Note que

$$\left(\int f_x d\nu\right)^+=\begin{cases}\displaystyle\int f_x d\nu=\int f_x^+ d\nu-\int f_x^- d\nu\le\int f_x^+ d\nu & \text{se } \displaystyle\int f_x d\nu\ge 0\\ 0 & \text{c.c.}\end{cases}$$

Daí, $\forall x\in N$, $(\int f_x d\nu)^+\le\int f_x^+ d\nu$ e, como $x\mapsto\int f_x^+ d\nu$ é integrável, segue que $x\mapsto(\int f_x d\nu)^+$ é integrável e daí $x\mapsto\int f_x d\nu$ é quase-integrável e

$$\int\left[\int\underbrace{f_x}_{=f_x^+-f_x^-}d\nu\right]d\mu=\int\left[\int f_x^+ d\nu-\int f_x^- d\nu\right]d\mu=\underbrace{\int\left[\int f_x^+ d\nu\right]d\mu}_{=\int f^+ d(\mu\times\nu)}-\underbrace{\int\left[\int f_x^- d\nu\right]d\mu}_{=\int f^- d(\mu\times\nu)}=\int f d(\mu\times\nu)$$

Para seções "$y$" o argumento é análogo.

- Observação: Os dois teoremas acima são, em geral, aplicados "in tandem". Tipicamente, dada $f:X\times Y\to\mathbb{K}$ $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-mensurável, queremos calcular $\int f$ via integrais interadas. A estratégia é:
  (i) Calcule $\int|f|$ por Tonelli.
  (ii) Se $\int|f|<\infty$, aplica-se Fubini para calcular $\int f$, calculando-se integrais iteradas.

Teorema 3. (Fubini para medidas completas) Sejam $(X,\mathcal{M},\mu)$ e $(Y,\mathcal{N},\nu)$ espaços de medida $\sigma$-finitos e completos, e $(X\times Y,\overline{\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}},\lambda)$ o completamento de $(X\times Y,\mathcal{M}\otimes\mathcal{N},\mu\times\nu)$. Dada $f$ $\overline{\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}}$-mensurável e a) $f\ge 0$ ou b) $f\in\mathcal{L}^1(\lambda)$, tem-se:

(1) Para $\mu$-q.t. $x\in X$, $f_x$ é $\mathcal{N}$-mensurável ($\ge 0$ com a), $\in\mathcal{L}^1(\nu)$ com b)), a função definida q.s. $x\mapsto\int f_x d\nu$ é mensurável ($\ge 0$ com a) e $\in\mathcal{L}^1(\mu)$ com b)) e:

(2)

$$\int\left[\int f_x d\nu\right]d\mu=\int f d\lambda$$

Enunciado análogo para seções "$y$".

Observação. O teorema acima se aplica, em particular, para o completamento de $(\mathbb{R}^n=\prod_1^n\mathbb{R},\otimes_1^n\mathcal{L},\prod_1^n m)$, onde $\mathcal{L}$ é a $\sigma$-álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e $m$ a medida de Lebesgue em $\mathcal{L}$. Como veremos na próxima seção, tal completamento é o espaço de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^n,m^n)$.