MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/∼glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 11 (18/4)`

`I) Medida Produto` Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida. Queremos definir uma medida em $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ induzida por μ e ν de forma natural.

Definição 1. Seja $\mathcal{R} \doteq \{A \times B | A \in \mathcal{M} \text{ e } B \in \mathcal{N}\}$. Os elementos de $\mathcal{R}$ chama-se <u>retângulos mensuráveis</u>.

Proposição 1. Com a notação acima, $\mathcal{R}$ é uma semi-álgebra. Com efeito:

- Se $A \times B \in \mathcal{R}$ e $A' \times B' \in \mathcal{R}$,

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = \underbrace{(A \cap A')}_{\in \mathcal{M}} \times \underbrace{(B \cap B')}_{\in \mathcal{N}} \in \mathcal{R}$$

- $X \times Y \in \mathcal{R}$
- Dado $A \times B \in \mathcal{R}$,

$$(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c) = (A^c \times Y) \dot\cup (A \times B^c)$$

Corolário 1. A álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{R})$ gerada por $\mathcal{R}$ é dada por:

$$\mathcal{A} = \{\dot\cup_1^n A_i \times B_i | (A_i \times B_i)_{1 \leq i \leq n} \prec \mathcal{R}\}$$

- Note que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ (pois $\sigma(\mathcal{R}) \subset \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{R})$).

Definição 2.

$$\pi_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty)$$
$$E = \dot\bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i \mapsto \sum_{i=1}^n \mu(A_i)\nu(B_i)$$

Proposição 2. Com a notação acima, π_0 está bem definida e é uma medida em $\mathcal{A}$.

Lema 1. Seja $A \times B \in \mathcal{R}$ e $(A_i \times B_i)_{i \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{R}$ tal que $A \times B = \dot\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \times B_i$. Então $\mu(A)\nu(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)\nu(B_i)$.

- Para verificar que π_0 está bem definida:

$$E = \dot\bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i = \dot\bigcup_{j=1}^m A'_j \times B'_j$$

  Então:

$$(\forall i) A_i \times B_i = (A_i \times B_i) \cap E = \dot\bigcup_{j=1}^m (A_i \cap A'_j) \times (B_i \cap B'_j)$$

  Portanto, pelo lema $\mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap A'_j)\nu(B_i \cap B'_j)$, donde $\sum_{i=1}^n \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap A'_j)\nu(B_i \cap B'_j)$ e o mesmo vale para $\sum_{j=1}^m A'_j \times B'_j$.

- <u>Prova do lema</u>: Note que

$$\underbrace{\chi_{A \times B}}_{= \chi_A \cdot \chi_B} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\chi_{A_i \times B_i}}_{= \chi_{A_i} \cdot \chi_{B_i}}$$

  i.e. $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$:

$$\chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_{A_i}(x) \cdot \chi_{B_i}(y)$$

Fixe $y \in Y$ e olhe para os dois membros como funções mensuráveis positivas de x. Tem-se:

$$\underbrace{\int \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) d\mu(x)}_{= \chi_B(y)\mu(A)} = \underbrace{\int \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_{A_i}(x) \cdot \chi_{B_i}(y) d\mu(x)}_{\overset{\text{TCM}}{=} \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\int \chi_{A_i}(x) \chi_{B_i}(y) d\mu(x)}_{= \chi_{B_i}(y)\mu(A_i)}}$$

Assim, $\forall y \in Y$:

$$\mu(A) \cdot \chi_B(y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_{B_i}(y) \cdot \mu(A_i)$$

Daí:

$$\underbrace{\int \mu(A) \cdot \chi_B(y) d\nu(y)}_{= \mu(A) \cdot \nu(B)} = \underbrace{\int \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_{B_i}(y) \mu(A_i) d\nu(y)}_{\overset{\text{TCM}}{=} \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\int \chi_{B_i}(y) \mu(A_i) d\nu(y)}_{= \mu(A_i) \cdot \nu(B_i)}}$$

- Prova da proposição: exercício, usando o lema.
- Como π_0 é uma medida em $\mathcal{A}$, segue do teorema de extensão de Carathéodory que
  1. A restrição da medida exterior π^* induzida por π_0 a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{A})$ é uma medida que extende π_0. Definição: Tal medida chama-se medida produto e denota-se por $\mu \otimes \nu = \mu \times \nu : \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \to [0, \infty]$.
  2. A restrição de π^* a $\sigma(\pi^*) \supset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ é medida, a qual denotaremos por $\overline{\mu \times \nu}$. Note que $(X \times Y, \sigma(\pi^*), \overline{\mu \times \nu})$ é o saturamento do completamento de $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$.
  3. Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ forem σ-finitos, π_0 também o é. Com efeito, tome:
     (a) $(A_i)_{i \in \mathcal{N}} \prec \mathcal{M}$ com $(\forall i)$ $\mu(A_i) < \infty$ e $\dot{\cup}_{i \in \mathbb{N}} A_i = X$.
     (b) $(B_j)_{j \in \mathcal{N}} \prec \mathcal{N}$ com $(\forall j)$ $\mu(B_j) < \infty$ e $\dot{\cup}_{j \in \mathbb{N}} B_j = Y$.

     Então, $(A_i \times B_j)_{i,j \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ é tal que $(\forall i, j)$ $\pi_0(A_i \times B_j) = \mu(A_i)\nu(B_j) < \infty$ e $\cup_{i,j \in \mathbb{N}} A_i \times B_j = X \times Y$. Nesse caso, pela unicidade dada pelo teorema de extensão de Carathéodory, $\mu \times \nu$ é a única extensão de π_0 a uma medida em $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ ($\therefore$ é a única medida em $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ que, em todo retângulo mensurável $A \times B \in \mathcal{R}$, é dada por $\mu(A)\nu(B)$). Além disso, $\overline{\mu \times \nu}$ é o completamento de $\mu \times \nu$.
- Observações:
  1. A mesma contrução pode ser feita para uma sequência finita $\{(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ de espaços mensuráveis, obtendo-se uma medida $\prod_{i=1}^n \mu_i = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n : \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n \to [0, \infty]$ tal que $\prod_{i=1}^n \mu(A_i \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i)$ se $(A_1 \times \cdots \times A_n) \in \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$.
  2. Valem as relações de associatividade esperadas. Por exemplo, se $\{(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)\}_{1 \leq i \leq 3}$, as bijeções:

     $$\begin{array}{ccccc} X_1 \times X_2 \times X_3 & \overset{\equiv}{\to} & (X_1 \times X_2) \times X_3 & \overset{\equiv}{\to} & X_1 \times (X_2 \times X_3) \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & ((x_1, x_2), x_3) & \mapsto & (x_1, (x_2, x_3)) \end{array}$$

     induzem isomorfismos mensuráveis

     $$\begin{aligned} (X_1 \times X_2 \times X_3, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3) &\equiv ((X_1 \times X_2) \times X_3, (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{M}_3) \\ &\equiv (X_1 \times (X_2 \times X_3), \mathcal{M}_1 \otimes (\mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3)) \end{aligned}$$

     e, com essas identificações:

     $$\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$$
- Próximo objetivo: Dados $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida, queremos investigar integrabilidade e calcular integrais em $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ através de integrais iteradas.
- Fixemos, até o final desta seção, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida.

- Notação:

  1. Para $E \subset X \times Y$ e $x \in X$, $y \in Y$

$$E_x \doteq \{y \in Y | (x,y) \in E\} \subset Y$$
$$E^y \doteq \{x \in X | (x,y) \in E\} \subset X$$

  2. Para $f : X \times Y \to \mathbb{K}$, $x \in X$, $y \in Y$

$$f_x \doteq f(x, \cdot) : Y \to \mathbb{K}$$
$$f^y \doteq f(\cdot, y) : X \to \mathbb{K}$$

Proposição 3. Com a notação acima:

(a) Se $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$: $\forall x \in X$, $E_x \in \mathcal{N}$ e $\forall y \in Y$, $E^y \in \mathcal{M}$.

(b) Se $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \to \mathbb{K}$ é mensurável: $\forall x \in X$, $f_x : (Y, \mathcal{N}) \to \mathbb{K}$ é mensurável e $\forall y \in Y$, $f^y : (X, \mathcal{M}) \to \mathbb{K}$ é mensurável.

- Prova:

  (a) 1. Se $E = A \times B \in \mathcal{R}$:

$$E_x = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x \notin A \\ B & \text{se } x \in A \end{cases} \in \mathcal{N}$$

  Analogamente

$$E^y = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y \notin B \\ A & \text{se } y \in B \end{cases} \in \mathcal{M}$$

  2. Seja $\mathcal{C} = \{E \subset X \times Y | \forall x \in X, \forall y \in Y, E_x \in \mathcal{N} \text{ e } E^y \in \mathcal{M}\}$. Já vimos que $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$. $\vdash \mathcal{C}$ é σ-álgebra (daí $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{C}$ e daí a tese). Com efeito:
     (i) $\mathcal{C} \neq \emptyset$ (pois $\emptyset \neq \mathcal{R} \subset \mathcal{C}$)
     (ii) Seja $E \in \mathcal{C}$. $\vdash E^c \in \mathcal{C}$. De fato, $(\forall x \in X)$ $(E^c)_x = (E_x)^c \in \mathcal{N}$ (pois $y \in (E^c)_x \Leftrightarrow (x,y) \in E^c \Leftrightarrow (x,y) \notin E \Leftrightarrow y \notin E_x \Leftrightarrow y \in (E_x)^c$) e $(\forall y \in Y)$ $(E^c)^y = (E^y)^c \in \mathcal{M}$ $\therefore E^c \in \mathcal{C}$.
     (iii) Seja $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{C}$. $\vdash \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$. Ora, $\forall x \in X$:

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n)_x \in \mathcal{N}$$

     (pois $y \in (\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n)_x \Leftrightarrow (x,y) \in \cup_n E_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} | (x,y) \in E_n \Leftrightarrow y \in \cup_n (E_n)_x$)
     Analogamente, $\forall y \in Y$:

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)^y = \bigcup_n (E_n)^y \in \mathcal{M}$$

     $\therefore \cup_n E_n \in \mathcal{C} \therefore \mathcal{C}$ é σ-álgebra.

  (b) É corolário de (a), pois, $\forall B \subset \mathbb{K}$ aberto,

$$(\forall x \in X)(f_x)^{-1}(B) = [f^{-1}(B)]_x \overset{\text{por (a)}}{\in} \mathcal{N}$$

  (pois $y \in (f_x)^{-1}(B) \Leftrightarrow f_x(y) \in B \Leftrightarrow f(x,y) \in B \Leftrightarrow (x,y) \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow y \in [f^{-1}(X)]_x$) e argumento análogo para f^y.

Definição 3 (classe monótona). Sejam X conjunto, $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}(X)$. $\mathcal{C}$ diz-se uma classe monótona se $\mathcal{C} \neq \emptyset$ e:

(i) $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ crescente $\Rightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$

(ii) $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{C}$ decrescente $\Rightarrow \cap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$

- Exemplo: Toda σ-álgebra é uma classe monótona.

Proposição 4. A intersecção de uma família $(\mathcal{C}_\alpha)_{\alpha\in A}$ de classes monótonas em X é uma classe monótona se for não-vazia.

Definição 4. Dado $E \subset 2^X$, a classe monótona gerada por E é a interseção da família de todas as classes monótonas $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}(X)$ tal que $E \subset \mathcal{C}$. Notação: $\mathcal{C}(E)$.

Lema 2 (Lema da Classe Monótona). Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma álgebra em $\mathbb{P}(X)$. Então $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

- Prova: É claro que $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$. Para verificar a outra inclusão, basta mostrar que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é uma σ-álgebra. Com efeito, para cada $E \in \mathcal{C} \doteq \mathcal{C}(\mathcal{A})$, defina $C(E) = \{F \in \mathcal{C} | E\backslash F \in \mathcal{C}, F\backslash E \in \mathcal{C} \text{ e } F \cap E \in \mathcal{C}\}$. Note que, dados $E, F \in \mathcal{C}$, $F \in C(E) \Leftrightarrow E \in C(F)$ (por simetria na definição de $C(E)$).
  - Afirmação: $\forall E \in \mathcal{C}$, $C(E) = \mathcal{C}$. Nesse caso, $\forall E, F \in \mathcal{C}$, $E\backslash F \in \mathcal{C}$ e $E \cap F \in \mathcal{C}$. Daí, como $X \in A \subset \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ é fechada por complementação e intersecção finita. Ou seja, $\mathcal{C}$ é uma álgebra e é fechada por união enumerável crescente $\therefore \mathcal{C}$ é σ-álgebra.
  - Prova da afirmação:
    1. $\forall E \in \mathcal{C}$, $C(E)$ é uma classe monótona. Com efeito:
       (i) $C(E) \neq \emptyset$ (pois $E \in C(E)$)
       (ii) Se $(F_n)_n \prec C(E)$ crescente, tem-se:
       (ii.1)
       $$\left(\bigcup_n F_n\right)\backslash E = \bigcup_n \underbrace{(F_n\backslash E)}_{\in\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$$
       (ii.2)
       $$E\backslash\left(\bigcup_n F_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(E\backslash F_n)}_{\in\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$$
       (ii.3)
       $$E\cap\left(\bigcup_n F_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(E\cap F_n)}_{\in\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$$
       (iii) Se $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec C(E)$ decrescente, tem-se:
       (iii.1)
       $$\left(\bigcap_n F_n\right)\backslash E = \bigcap_n \underbrace{(F_n\backslash E)}_{\in\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$$
       (iii.2)
       $$E\backslash\left(\bigcap_n F_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(E\backslash F_n)}_{\in\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$$
       (iii.3)
       $$E\cap\left(\bigcap_n F_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(E\cap F_n)}_{\in\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$$
       $\therefore C(E)$ é uma classe monótona, como afirmamos.
    2. Dado $E \in \mathcal{A}$, tem-se:
       (i) $\mathcal{A} \subset C(E)$, i.e. $\forall F \in \mathcal{A}$, $F \in C(E)$. Então $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{A}) \subset C(E)$ (pois $C(E)$ é classe monótona, por 1.). Daí, $\mathcal{C} = C(E)$.
    3. Dado $F \in \mathcal{C}$, afirmo que $\mathcal{A} \subset C(F)$. Com efeito, $\forall E \in \mathcal{A}$, por 2. $F \in C(E) \Leftrightarrow E \in C(F)$, i.e. $\mathcal{A} \subset C(F)$. Daí, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{A}) \subset C(F) \therefore \mathcal{C} = C(F)$.